

TIMOTHY GOWERS

MATEMATİK

KÜLTÜR KİTAPLIĞI 128

DOST

KÜLTÜR KİTAPLIĞI: 128

D

Timothy Gowers

Cambridge Üniversitesi'nde Rouse Ball matematik profesörü olan Timothy Gowers bu alandaki çalışmalarıyla birçok ödüle değer bulunmuştur.

Gowers, Timothy
Matematik
ISBN 978-975-298-492-9 / Türkçesi: Abdullah Ersoy
Haziran 2013, Ankara, 182 sayfa
Kültür Kitaplığı: 128; Bilim: 5

MATEMATİK

Timothy Gowers



ISBN 978-975-298-492-9

Mathematics
Timothy Gowers

Türkçesi, Abdullah Ersoy

Teknik hazırlık, Mehmet Dirican

Baskı, Pelin Ofset Ltd. Şti.; İvedik Organize Sanayi Bölgesi, Matbaacılar Sitesi 588. Sokak no: 28-30 Yenimahalle / Ankara
Tel: (0.312) 395 25 80-81 • Faks: (0.312) 395 25 84

Dost Kitabevi Yayınları
Paris Cad. No: 76/7, Kavaklıdere 06680 Ankara
Tel: (0.312) 435 93 70 • Faks: (0.312) 435 79 02
www.dostyayinevi.com • bilgi@dostyayinevi.com

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

20. yüzyılın başlarında büyük matematikçi David Hilbert bazı önemli matematiksel düşüncelerin yapısal olarak benzer olduklarını fark etmiştir. Aslında uygun bir genelleme düzeyinde bunların aynı şeyler olarak ele alınabileceklerini görmüştür. Bu gözlem ve buna benzer diğer gözlemler yeni bir matematik dalının ortaya çıkmasına yol açmıştır ve bunun temel kavramlarına Hilbert'in adı verilmiştir. Hilbert uzayı kavramı, sayı teorisinden kuantum mekaniğine kadar, modern matematiğin o kadar büyük bölümüne ışık tutmaktadır ki Hilbert uzay teorisinin en azından küçük bir kısmını bilmemeniz durumunda, iyi eğitim görmüş bir matematikçi olduğunuzu iddia edemezsiniz.

Peki Hilbert uzayı nedir? Tipik bir üniversite matematik dersinde tam bir iç çarpım uzayı olarak tanımlanır. Bu tür derslere giren öğrencilerin, daha önceki derslerden, iç çarpım uzayının iç çarpımla donatılmış bir vektör uzayı olduğunu ve uzayın da ancak onun içinde yer alan her Cauchy dizisinin yakınsaması durumunda tam hale geleceğini bilmeleri beklenir. Elbette bu türden tanımların anlamlı olabilmesi için öğrencilerin vektör uzayı, iç çarpım,

Cauchy dizisi ve yakınsamayı bilmeleri gerekir. Bunlardan sadece biri (en uzun olanı değil) şu şekilde verilebilir: Cauchy dizisi öyle bir $x_1, x_2, x_3 \ldots$ dizisidir ki her pozitif sayı ϵ için bir N tam sayısı vardır ve burada N'den daha büyük olan herhangi iki tamsayı p ve q için x_p'den x_q'ya olan uzaklık en fazla ϵ kadardır.

Özetle, Hilbert uzayının ne olduğunu anlayabilmek için önce birbiriyle hiyerarşik ilişkisi olan daha düşük düzeydeki kavramları öğrenmeniz gerekir. Bu, şaşırtıcı olmayan bir şekilde zaman ve çaba gerektirir. Aynı şey birçok önemli matematiksel düşüncenin çoğu için geçerli olduğundan, özellikle çok kısa olması gereken anlaşılabilir bir matematiğe giriş sunmaya çabalayan bir kitabın başarabilecekleri konusunda ciddi bir sınırlama mevcuttur.

Bu güçlüğün etrafından dolaşmanın zekice bir yolunu bulmaya çalışmak yerine, matematiksel iletişimdeki değişik bir engel üzerinde yoğunlaştım. Teknik olmaktan çok felsefi olan bu sınırlama, sonsuz, eksi bir sayının karekökü, yirmi altıncı boyut ve eğri uzay gibi kavramlardan memnun olanları, bunları rahatsızlık verecek ölçüde paradoksal bulanlardan ayırmaktadır. Teknik yönlerine girmeden bu düşünceler karşısında kendini rahat hissetmek mümkündür ve bunun nasıl olabileceğini göstereceğim.

Bu kitabın bir mesajı varsa, bu, soyut düşünmeyi öğrenmenin gerekliliğidir. Çünkü bu yapıldığında birçok felsefi zorluk ortadan kalkar. Soyut yöntemle neyi anlatmak istediğimi ayrıntılı olarak ikinci bölümde açıklayacağım. Birinci bölüm daha bilinen ve ilişkili bir soyutlama türünü ele almaktadır: gerçek dünya problemlerinden temel özellikleri çekip çıkarmak ve böylece bunu matematiksel özel-

likler haline dönüştürmek süreci. Bu iki bölüm ve ayrıntılı bir kanıtlamanın ne olduğunu tartıştığım üçüncü bölüm genelde matematik hakkındadır.

Bundan sonra daha spesifik konuları tartışacağım. Son bölüm matematikten daha çok matematikçiler hakkındadır ve bu yüzden karakter olarak diğerlerinden bir ölçüde farklıdır. Daha sonrakileri okumadan önce ikinci bölümün okunmasını öneririm, fakat bunun dışında kitap mümkün olduğu kadar hiyerarşik biçimde düzenlenmiştir: kitabın sonuna doğru okuyucunun daha önce yer alan her şeyi anlaması ve hatırlaması gerektiğini varsaymayacağım.

Bu kitabı okumak için çok az önbilgiye gerek bulunmaktadır –bir İngiliz GCSE kursu ya da eşdeğeri yeterlidir– fakat bunu okuyucunun kafasına sokmaya çalışmak yerine, okuyucunun bir ölçüde ilgisinin olduğunu varsayıyorum. Bu yüzden anekdotlar, karikatürler, ünlem işaretleri, kandırmacalı bölüm adları ya da Mandelbrot resimleri kullanmadım. Ayrıca kamuoyunun kafasında mevcut matematiksel araştırmalardaki etkilerinden çok daha fazla yer tutan ve diğer birçok kitapta iyi bir şekilde ele alınan kaos kuramı ve Gödel teorisi gibi konulardan da kaçındım. Buna karşılık, daha dünyevi konuları ele aldım ve daha ileri düzeyde nasıl anlaşılabileceklerini göstermek için ayrıntılı biçimde tartıştım. Diğer bir deyişle, genişlik yerine derinliği hedefledim ve anaakım matematiğinin çekiciliğini göstermek için kendisini ifade etmesine çalıştım.

Kitabın yazımı sırasında verdikleri destek ve gösterdikleri konukseverlik için Princeton Üniversitesi Clay Matematik Enstitüsü'ne teşekkür etmek isterim. Önceki taslakları okudukları için Gilbert Adair, Rebecca Gowers,

Emily Gowers, Patrick Gowers, Joshua Katz ve Edmund Thomas'a teşekkür borçluyum. Onlar genel okuyucu sayılmayacak kadar zeki ve bilgili olsalar da, yazdıklarımın en azından matematikçi olmayanların bazıları tarafından kavranabilir olduğunu bilmek insana güven veriyor. Bu kitabı, gün boyunca ne yaptığım konusunda bir fikir vermesi umuduyla Emily'ye ithaf ediyorum.

I. Bölüm

MODELLER

Taş nasıl fırlatılır?

Sakin bir havada düz bir yerde durduğunuzu ve elinizde mümkün olduğu kadar uzağa fırlatmak istediğiniz bir taş olduğunu varsayalım. Hangi güçle atacağınız veri olduğunda, vermeniz gereken en önemli karar, taşın elinizden hangi açıyla çıkacağıdır. Bu açı çok yatay olursa, taşın büyük bir yatay hızı olmakla birlikte, oldukça kısa bir sürede yere değecek ve bu yüzden de çok uzağa gitme şansı olmayacaktır. Öte yandan, taşı çok yükseğe atarsanız, süreçte önemli bir mesafe kaydetmeden havada uzun süre kalacaktır. Burada bir tür uzlaşıma ihtiyaç olduğu açıktır.

Newtoncu fizik ve biraz temel matematiğin bir bileşimi kullanılarak elde edilebilecek en iyi uzlaşım bu koşullar altında olabileceğini umut ettiğimiz kadar belirgindir: elinizden çıktığında taşın yönü yatayla 45 derece açıda olmalıdır. Aynı hesaplamalar, taşın havada yol alırken bir parabolik eğri yörüngesi izleyeceğini göstermekte ve

elinizi terk ettikten sonra hangi hızla yol alacağını size söylemektedir.

Bu nedenle, bilim ve matematiğin bir bileşimi, taşın fırlatıldığı andan yere indiği ana kadarki tüm davranışını tahmin etmemize olanak sağlamaktadır. Ancak, bunu bazı basitleştirici varsayımlar yapmaya hazır olmamız durumunda gerçekleştirmektedir. Bunların en önemlisi, taşın üzerinde etkide bulunan tek gücün yerçekimi olduğu ve bu gücün her yerde aynı derecede ve yönde olduğu varsayımıdır. Fakat bu doğru değildir, çünkü hava direncini, dünyanın kendi etrafında dönmesini, aydan kaynaklanan küçük bir yerçekimsel alanı, ne kadar yüksekte olursanız dünyanın yerçekimsel alanının o kadar zayıf olduğunu ve bu gücün dünya üzerinde bir yerden diğerine yer değiştirdiğinizde "dikey aşağı" yönün hafifçe değiştiğini dikkate almamaktadır. Hesaplamaları kabul etseniz bile, 45 derecelik açı bir diğer kapalı varsayıma, elinizden çıktığında taşın hızının yönüne bağlı olmadığı varsayımına dayalıdır. Bu da doğru değildir: açı yatay olduğunda taş daha güçlü şekilde fırlatılır.

Bazıları diğerlerinden daha ciddi olan bu itirazların ışığında, hesaplamalar ve bunları izleyen öngörülere ilişkin olarak nasıl bir tavır alınmalıdır? Bir yaklaşım, mümkün olduğu kadar çok sayıda itirazın dikkate alınması olabilir. Fakat daha mantıklı bir politika bunun tam tersidir: ne kadar kesinlik istendiğine karar verilmesi ve daha sonra buna mümkün olduğu kadar basit yoldan ulaşılmaya çalışılması. Deneyimlerinizden basitleştirici bir varsayımın verilecek yanıt üzerinde yalnızca küçük bir etkide bulunacağını bilirseniz, bu varsayımda bulunmanız gerekir.

Örneğin, taş küçük, sert ve makul yoğunlukta olursa, hava direncinin taş üzerindeki etkisi oldukça az olacaktır. Taşın fırlatılmasından sonraki açıda önemli bir hata olması olası ise, hava direncini hesaba katarak hesaplamaları karmaşık hale getirmenin anlamı yoktur. Bunu dikkate almak isterseniz, şu karar kuralı yeterince iyidir: hava direnci ne kadar fazla ise, bunu düzeltmek için açınızı o kadar düzleştirmeniz gerekir.

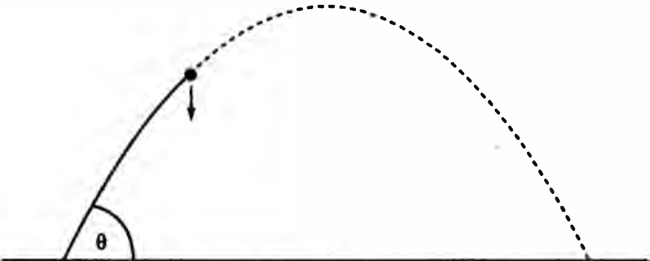
Matematiksel model nedir?

Bir fizik sorununun çözümü incelendiğinde, her zaman olmasa da genellikle bilimin ve matematikçilerin yaptığı katkılar arasında belirgin bir ayrım yapılması mümkündür. Bilim insanları kısmen gözlem ve deneyimlerin sonuçlarına ve kısmen de basitlik ve açıklama gibi daha genel özelliklere dayalı olarak bir teori geliştirirler. Matematikçiler ya da bilim yapan matematikçiler sonra teorinin saf mantıksal sonuçlarını araştırırlar. Bazen bunlar teorinin açıklama getirmek için tasarlandığı olguları kesin biçimde öngören rutin hesaplamaların sonucudur, fakat bazen de teorinin öngörüleri tümüyle beklenmedik öngörüler olabilir. Bunlar daha sonra deney sonucunda doğrulanırsa, teorinin lehine etkileyici bir kanıt elde edilmiş olur.

Bununla birlikte, bilimsel öngörünün doğrulanması kavramı bir ölçüde sorunludur. Bu, tartışmakta olduğum türde basitleştirme ihtiyacından kaynaklanmaktadır. Bir başka örnek vermek gerekirse, Newton'un hareket ve yerçekimi yasası, aynı yükseklikten iki nesneyi bıraktığınızda,

bunların (yer düz ise) yere aynı zamanda düşeceklerini ifade eder. İlk kez Galileo tarafından işaret edilen bu olgu, sezgiye bir ölçüde terstir. Aslında, sezgiye ters olmaktan daha da kötüdür: bir golf topu ve bir masa tenisi topu ile

1. Uçan bir top I.



2. Uçan bir top II.

denediğinizde, golf topunun yere daha önce düştüğünü göreceksiniz. O zaman Galileo hangi açıdan haklıydı?

Elbette, hava direncinden dolayı bu küçük deneyi Galileo'nun teorisinin çürütülmesi olarak kabul etmeyiz: deneyimler, hava direnci az olduğunda teorinin iyi işlediğini göstermektedir. Newtoncu mekaniğin öngörülerinin yanlış olduğu her durumda hava direncini kurtarıcı olarak işin içine sokmayı çok uygun bulursanız, bilime olan inancınız ve Galileo'ya olan hayranlığınız, bir hava boşluğu ortamında bir tüyün düşüşünü izlediğinizde –gerçekten de bir taşın düşmesi gibi düşer– eski biçimini alır.

Bununla birlikte, bilimsel gözlemler hiçbir zaman tamamen doğrudan ve kesin olmadığından bilim ve matematik arasındaki ilişkiyi tanımlamanın daha iyi bir yolunu bulmamız gerekir. Matematikçiler bilimsel kuramları dünyaya doğrudan doğruya uygulamazlar. Daha doğrusu, *modellere* uygularlar. Model, bu anlamda, incelenmekte olan dünya parçasının, kesin hesaplamaların yapılmasının mümkün olduğu, basitleştirilmiş bir versiyonudur. Taş örneğinde, dünya ve model arasındaki ilişki Şekil 1 ve 2 arasındaki ilişkiye benzer.

Belli bir fiziksel durumu modellemenin birçok yolu bulunmaktadır ve belli bir modelin dünya hakkında bize ne bilgi verebileceği konusunda karar verirken deneyimle daha ileri düzeyde teorik düşünmenin bir bileşimini kullanmalıyız. Bir model seçerken, önceliklerden biri, modelin davranışının dünyanın gerçek, gözlenen davranışına yakın olmasını sağlamaktır. Fakat basitlik ve matematiksel zarafet gibi diğer faktörler de genellikle önemli olabilir. Aslında, vereceğim örneklerden bazılarının göstereceği

gibi, dünyaya hemen hemen hiç benzemeyen çok yararlı modeller mevcuttur.

Bir çift zar atmak

Bir çift zar atarsam ve bunların davranışını bilmek istersem, deneyimim bana sorulması gerçekçi olmayan bazı sorular olduğunu söyler. Örneğin, hiç kimsenin, elinde pahalı bir teknoloji olsa ve zar bir makine tarafından atılsa bile, belli bir zar atışının sonucunu bana önceden söylemesi beklenemez. Buna karşılık, 'zardaki sayıların toplamının yedi olma olasılığı' gibi olasılık niteliğindeki sorular genellikle yanıtlanabilir ve bu soruya verilecek yanıtlar da genellikle, örneğin para için tavla oynuyorsam yararlı olabilir. İkinci tür sorular için, zar atışının aşağıdaki otuz altı çift sayıdan birinin rassal olarak seçimi biçiminde temsili yoluyla bu durum modellenebilir.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Her çiftin birinci sayısı birinci zarın üzerindeki sayıyı ve ikinci sayı ise ikincisindeki sayıyı temsil etmektedir. İki sayının toplamının yedi olduğu tamı tamına altı çift sayı bulunduğundan zarların toplamının yedi olması olasılığı otuz altıda altı, yani altıda birdir.

Bu modele, zarlar atıldıklarında Newton yasalarına, en azından çok yüksek bir kesinlik derecesinde uydukları ve bu yüzden de yere düşüş biçimlerinin yalnızca rassal olduğu gerekçesiyle karşı çıkılabilir: aslında, bu genel olarak hesaplanabilir. Ancak hesaplamalar olağanüstü ölçüde karmaşık olacağından ve uygulamaya göre şekil, bileşim, başlangıç hızı ve zarın kendi etrafında dönüşüne ilişkin daha kesin bilgilere dayanması gerekeceğinden dolayı 'genel olarak' deyimi burada aşırı zorlamadır. Bu nedenle, daha karmaşık deterministik modelleri kullanmanın hiçbir avantajı bulunmamaktadır.

Nüfus artışının tahmini

Biyoloji ve ekonomi gibi 'yumuşak' bilimler, temsil ettikleri olgulardan çok daha basit matematiksel modellerle doludur ya da bazı yönlerden bilinçli olarak bile kesinlikten uzaktır. Fakat yine de bunlar yararlıdır ve ışık tutarlar. Biyolojiden büyük ekonomik önemi olan bir örnek olarak bir ülkenin 20 yıl sonraki nüfusunu tahmin etmeyi istediğimizi düşünelim. Kullanabileceğimiz çok basit bir model, tüm ülkeyi bir sayı çifti ile, $(t,P(t))$ ile temsil eder. Burada t zamanı $P(t)$ ise t zamanındaki nüfusu temsil etmektedir. Buna ek olarak, doğum ve ölüm oranlarını temsil etmek için iki sayımız, b ve d sayıları bulunmaktadır. Bunlar nüfusun yüzdesi olarak yıllık doğum ve ölüm sayılarıdır.

Diyelim ki 2002 yılı başında nüfusun P olduğunu biliyoruz. Tanımlanan bu modele göre, yıl içindeki doğum ve ölümler sırasıyla bP ve dP olacaktır ve böylece 2003 yılı-

nın başındaki nüfus $P + bP - dP = (1 + b - d)P$ olacaktır. Bu düşünüş herhangi bir yıl için geçerlidir. Böylece $n + 1$ yılının başındaki nüfus n yılının başındaki nüfusun $(1 + b - d)$ ile çarpımına eşit olacaktır. Diğer bir deyişle, her yılki nüfus $(1 + b - d)$ ile çarpılmaktadır. Buradan 20 yıl sonrası için $(1 + b - d)^{20}$ ile çarpılacağı sonucu çıkar ve bu da ilk soruya bir yanıt sağlamaktadır.

Bu basit model bile, doğum oranının ölüm oranından büyük ölçüde yüksek olması durumunda, nüfusun çok hızlı bir şekilde artacağı konusunda bizi ikna etmeye yetecektir. Bununla birlikte, bu modelin tahminlerini doğru yoldan çokça saptıracak gerçekdışı yönleri de bulunmaktadır. Örneğin, doğum ve ölüm oranlarının 20 yıl boyunca aynı kalacağı varsayımı çok makul değildir. Çünkü geçmişte tıptaki ilerlemeler, yeni hastalıklar, kadınların doğum yaptıkları ortalama yaştaki artışlar, vergi teşvikleri ve ara sıra meydana gelen büyük ölçekli savaşlar gibi sosyal değişimlerden ve siyasal olaylardan etkilenmiştir. Doğum ve ölüm oranlarının zaman içinde değişkenlik göstermesini beklemeye yol açan bir diğer neden de ülkedeki insanların yaşlarının oldukça dengesiz dağılımıdır. Örneğin, 15 yıl önce büyük bir doğum patlaması yaşanmışsa, 10-15 yıl sonra doğum oranının yükselmesi beklenebilir.

Bu yüzden, diğer faktörleri modelin içine katarak modeli karmaşık hale getirmek çekici olabilir. Zaman içinde $b(t)$ ve $d(t)$ oranları değişkenlik gösterebilir. Nüfus büyüklüğünü temsil eden tek bir $P(t)$ sayısı yerine, çeşitli yaş gruplarında kaç kişi olduğunu bilmek isteyebiliriz. Gelecekteki doğum ve ölüm oranlarının ne olabileceğini tahmin etmek için bu yaş gruplarındaki sosyal tavırların

ve davranışların mümkün olduğu kadar bilinmesi de yararlı olacaktır. Bu türden istatistiksel bilgilerin sağlanması yüksek maliyetli ve zor olabilir, fakat elde edilen bilgiler yapılacak tahminleri önemli ölçüde iyileştirir. Bu nedenle, hiçbir model diğerlerinden daha iyi görünmemektedir. Dolayısıyla, bir modelden mantıken istenebilecek en iyi şey, koşullu türden tahminlerdir: diğer bir deyişle, gerçekleştiklerinde toplumsal ve siyasi değişimlerin etkilerinin ne olacağını gösteren tahminler.

Gazların davranışı

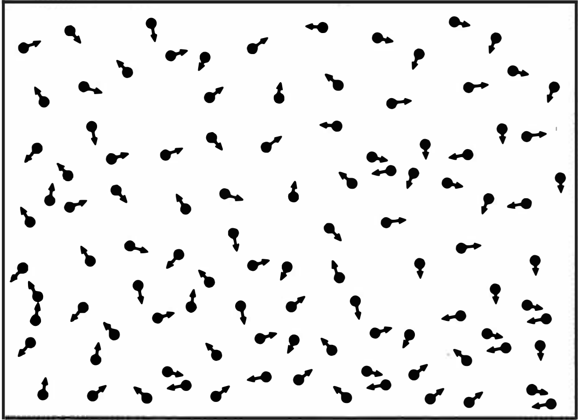
İlk defa Daniel Bernoulli tarafından 1738'de ortaya atılan ve 19. yüzyılın ikinci yarısında Maxwell, Boltzmann ve diğerleri tarafından geliştirilen gazların kinetik teorisine göre, gaz hareket eden moleküllerden oluşmuştur ve ısı ve basınç gibi özelliklerinden çoğu bu moleküllerin istatistiksel özellikleridir. Örneğin, ısı bunların ortalama hızlarına karşılık gelmektedir.

Bunu aklımızda tutarak, küp biçimindeki bir kutu içinde tutulan gazın modelini geliştirelim. Elbette kutu bir küp biçiminde temsil edilmelidir (yani, fiziksel değil de matematiksel küp) ve moleküller çok küçük olduklarından bunların küp içindeki noktalarla temsil edilmesi doğaldır. Bu noktaların hareket ettikleri varsayılır. Dolayısıyla, bunların hareketini yöneten kurallara karar vermemiz gerekir. Bu noktada bazı tercihler yapmak durumundayız.

Kutunun içinde tek bir molekül olsaydı, tek bir kesin kural olacaktı: bu sabit bir hızla hareket eder ve kutunun

duvarlarına çarpınca geriye sıçrardı. Bu modeli genellemenin düşünülebilir en basit yolu *N* adet molekülü almaktır. Burada *N* büyük bir sayıdır. Bunların aralarında kesinlikle hiçbir etkileşim olmadığını ve hepsinin bu şekilde davrandığını varsayalım. *N*-moleküllü modeli başlatabilmek üzere bu moleküller için, daha doğrusu bunları temsil eden noktalar için başlangıç konumlarına ve hızlarına karar vermemiz gerekir. Bunu yapmanın iyi bir yolu bu seçimin rassal olarak yapılmasıdır, çünkü gerçek gazın içinde belli bir zamanda moleküllerin dağılmaları ve birçok yönde hareket etmeleri beklenebilir.

Küp içindeki rassal bir nokta ile ya da rassal yön ile neyin anlatıldığını ifade etmek zor değildir, fakat hız 0'dan sonsuza kadar herhangi bir değer alabileceği için hızın ras-



3. Gazın iki boyutlu modeli.

sal olarak seçimi daha belirsizdir. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için tüm moleküllerin aynı hızla hareket ettikleri biçimindeki, fiziksel olarak makul olmayan varsayımı ve yalnızca başlangıç konumlarının ve yönlerinin rassal olarak seçildikleri varsayımını yapalım. Ortaya çıkan modelin iki boyutlu versiyonu Şekil 3'te gösterilmiştir.

N moleküllerimizin birbirinden tümüyle bağımsız olarak hareket ettikleri varsayımı bir diğer aşırı basitleştirmedir. Bu durum, örneğin, gazın yeterince düşük ısılarda niçin sıvı haline geldiğini anlamada bu modelin hiç kullanılamaması anlamına gelmektedir: eğer modeldeki noktaları yavaşlatırsanız, aynı, fakat daha yavaş işleyen modeli elde edersiniz. Bununla birlikte, bu model gerçek gazların davranışlarının büyük bölümünü açıklar. Örneğin, kutuyu giderek küçülttüğümüzü düşünelim. Moleküller aynı hızla hareket etmeyi sürdürecek, fakat şimdi kutu daha küçük olduğundan duvarlara daha sık çarpacak ve çarpacak daha az duvar olacaktır. Bu iki nedenden dolayı, duvarın belli bir alanında saniyedeki çarpışma sayısı daha yüksek olacaktır. Bu çarpışmalar gazın yaptığı basıncı oluşturur, bu nedenle gazı daha küçük bir hacme sıkıştırmanız durumunda –gözlemlerin de doğruladığı gibi– basıncının artması muhtemeldir. Benzer bir düşünce, gazın hacmini artırmadan ısısını artırdığınızda basıncının da niçin arttığını açıklar. Basınç, ısı ve hacim arasındaki sayısal ilişkilerin nasıl olacağını belirlemek çok zor değildir.

Yukarıdaki model kabaca Bernoulli'nin modelidir. Maxwell'in başarılarından biri, başlangıç hızlarının daha gerçekçi olarak nasıl seçileceği sorununu çözen güzel bir teorik düşünceyi keşfetmesi olmuştur. Bunu anlayabilmek

için, moleküllerin etkileşimde bulunmadıkları biçimindeki varsayımımızı terk ederek işe başlayalım. Bunun yerine, zaman zaman, bir çift küçük bilye topu gibi çarpıştıklarını ve bu çarpışmadan sonra enerjinin sakınımı ve moment yasalarına bağlı olarak, rassal fakat başka hızlarda ve başka yönlerde gideceklerini varsayacağız. Elbette, bunlar hacimsiz tek noktalar olduklarında bunu nasıl gerçekleştireceklerini görmek kolay değildir, fakat tartışmanın bu bölümü yalnızca molekül hızları ve yönlerindeki rassallığın informel olarak haklı gösterilmesi için gereklidir. Maxwell'in bu rassallığa ilişkin olarak akla çok yatkın iki varsayımı, bunun zaman içinde değişmeyeceği ve yönler arasında ayrım yapmayacağı biçimindeki varsayımlardır. Kabaca söylersek, bu varsayımlardan ikincisi, d_1 ve d_2 iki yön ve s belli bir hız olduğunda, bir partikülün d_1 yönünde s hızıyla hareket etme olasılığının d_2 yönünde s hızıyla hareket etme olasılığıyla aynı olması anlamına gelir. Şaşırtıcı bir şekilde, bu iki varsayım hızların nasıl dağılması gerektiğinin kesin biçimde belirlenmesi için yeterlidir. Diğer bir deyişle, bu varsayımlar, hızları rassal olarak seçmek istersek, bunu yapmanın tek doğal yolu olduğunu ifade eder. (Bunlar normal dağılıma göre tahsis edilmelidir. Bu dağılım, ünlü 'çan eğrisini' üreten dağılımdır ve matematiksel ve deneysel birçok değişik ortamda ortaya çıkar.)

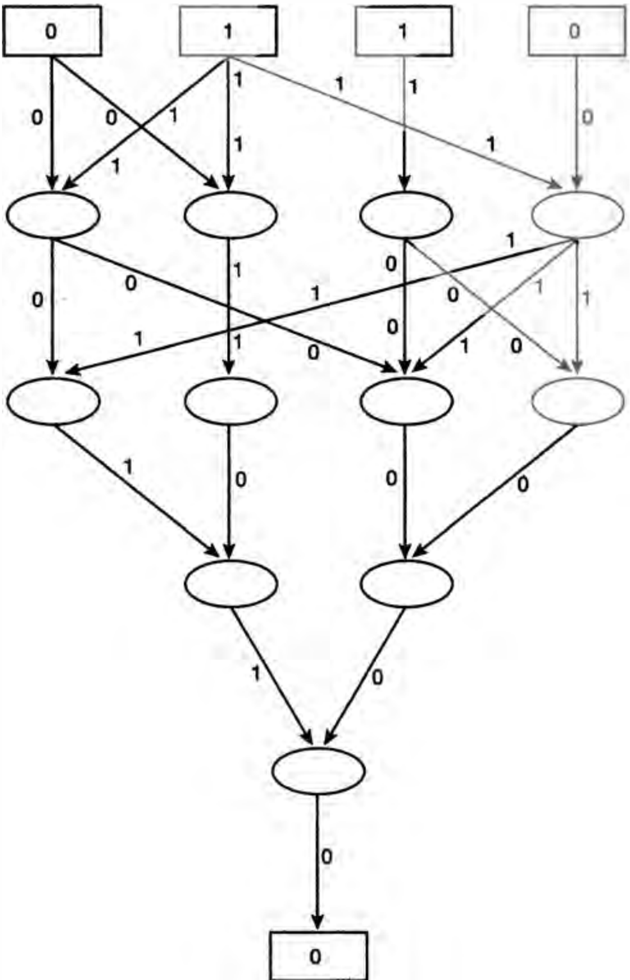
Hızları seçtikten sonra moleküller arasındaki etkileşimleri bir kenara bırakabiliriz. Bunun sonucunda, biraz daha iyileştirilmiş model ilk modelin birçok eksikliğini paylaşır. Bu eksiklikleri karşılamak için, etkileşimleri bir ölçüde modelleştirmekten başka yol yoktur. Etkileşen partiküllerin çok basit modellerinin bile şaşırtıcı bir şekilde

davrandıkları ve oldukça zor, aslında çoğu çözülmemiş matematiksel sorunları ortaya çıkardıkları görülmektedir.

Beyinlerin ve bilgisayarların modellenmesi

Bilgisayar da birbiriyle etkileşen birçok basit parçadan oluşmuş bir toplam olarak düşünülebilir ve büyük ölçüde bu nedenden dolayı teorik bilgisayar bilimi çözülmemiş önemli problemlerle doludur. Yanıtını bulmak isteyeceğimiz türden sorulara iyi bir örnek olarak şu verilebilir. Birisinin *p* ve *q* gibi iki asal sayı aldığını ve bunları çarptıktan sonra sonucun *pq* olduğunu söylediğini varsayalım. Bundan sonra sırasıyla her asal sayıyı alarak ve *pq*'ya eşit olup olmadığını araştırarak *p* ve *q*'nun ne olduğunu araştırabiliriz. Örneğin, size bu sayı 91 olarak verilmişse, hızlı bir şekilde bunun 2, 3 ya da 5'in katları olmadığını ve daha sonra da 7 x 13'e eşit olduğunu belirleyebilirsiniz.

Fakat *p* ve *q* çok büyükse –diyelim her biri 200 basamaklı ise–, bu deneme-yanılma yöntemi, güçlü bir bilgisayarın yardımıyla bile, tahmin edilemeyecek kadar uzun zaman alacaktır. (Bu güçlüğe ilişkin bir fikir edinmek için çarpımı 6901 olan iki asal sayı ve çarpımı 280123'ü veren iki sayı bulmaya çalışın.) Öte yandan, bu problemi ele almanın çok daha akıllıca bir yolu, problemin çözümünün çok uzun sürmeyeceği bir bilgisayar programının temeli olarak kullanılabilecek bir yol düşünülebilir. Böyle bir yöntem bulunabilirse, internette ya da başka bir yerdeki modern güvenlik sistemlerinin temelini oluşturan kodların kırılmasına olanak verecektir. Bu kodların şifrelerinin



4. Basit bir bilgisayar programı.

çözülmesinin güçlüğü, büyük sayıların faktörlerine ayrılmasındaki güçlüğe bağlıdır. Bu yüzden, p ve q'nun pq çarpımından hesaplanmasında kullanılabilecek hızlı ve etkin bir prosedürün mevcut olmadığını göstermenin bir yolu bulunabilirse, bu güven verici olacaktır. Ne yazık ki, bilgisayarlar hangi işler için kullanılabildikleri konusunda bizi sürekli olarak şaşkınlığa düşürseler de, neleri yapamayacakları konusunda hemen hiçbir şey bilinmemektedir.

Bu problem üzerinde düşünmeye başlamadan önce, bilgisayarı matematiksel olarak temsil etmenin mümkün olduğu kadar basit bir yolunu bulmamız gerekir. Şekil 4 bunu yapmanın en iyi yollarından birini göstermektedir. Bu, birbirine kenarlar adı verilen doğrularla bağlanmış düğüm tabakalarından oluşmaktadır. En üst tabakada, 0 ve 1'lerin bir dizisinden oluşan 'girdi' yer almakta ve en alt tabakada ise bir diğer 0 ve 1'ler dizisi olan 'çıktı' yer almaktadır. Düğümler VE, VEYA ve DEĞİL adı verilen üç türdedir. Bu kapılardan her biri yukarıdan gelen kenarlardan bazı 0 ve 1'leri almaktadır. Ne aldıklarına bağlı olarak şu basit kural uyarınca kendileri de 0 ve 1'leri göndermektedir: bir VE kapısı 1'den başka bir şey almamışsa, o zaman yalnızca 1'leri göndermekte ve tersi durumda 0'ları göndermektedir: eğer bir VEYA kapısı 0'lardan başka bir şey almamışsa 0'ları göndermekte ve diğer durumda 1'leri göndermektedir; yalnızca bir kenarın yukarıdan DEĞİL kapısı girişi yapmasına izin verilmekte ve bu kapı eğer 0 almışsa 1'leri göndermekte, 1'leri almışsa 0'ları göndermektedir.

Kenarlarla bağlanmış kapı sırasına *devre* adı verilmektedir ve anlattığım şey hesaplamanın devre modelidir. 'Hesaplama'nın uygun bir sözcük olmasının nedeni, devrenin

0 ve 1'lerin bir dizisini alması ve bunun önceden belirlenmiş bir kurala göre bir diğerine dönüştürülmesi olarak düşünülebilmesidir. Devre çok büyük olduğunda bu işlem çok karmaşık olabilmektedir. Bilgisayarlar bu dizileri bizim anlayabileceğimiz, yüksek düzey programlama dilleri, pencereler ve ikonlar vb. çıkış ve giriş formatlarına dönüştürseler de, bilgisayarların da yaptığı şey budur. Herhangi bir bilgisayar programını 01 dizilerini tam da bu kurallara göre dönüştüren bir devre biçimine dönüştürmenin oldukça basit bir yolu (teorik açıdan tabii – bunu uygulamada yapmak bir kabus olacaktır) ortaya çıkmaktadır. Bundan başka, bilgisayar programlarının önemli özelliklerinin karşılıkları ortaya çıkan devrelerde mevcuttur.

Özellikle, devredeki düğümlerin sayısı bilgisayar programının çalışma süresine karşılık gelmektedir. Bu yüzden 01 dizilerini belli bir şekilde dönüştürmek için çok büyük bir devreye ihtiyaç olduğu gösterilebilirse, çok uzun süre çalışacak bir bilgisayar programına ihtiyaç duyulacağı da ortaya konmuş olur. Devre modelini kullanmanın bilgisayarları doğrudan analiz etmeye göre avantajı, matematiksel açıdan, devrelerin daha basit, daha doğal ve üzerinde düşünmenin daha kolay olmasıdır.

Devre modelinde küçük bir değişiklik, beynin yararlı bir modelini ortaya çıkaracaktır. Şimdi 0 ve 1'ler yerine 0 ve 1 arasındaki sayılarla temsil edilebilen çeşitli güçlerdeki sinyaller bulunmaktadır. Nöronlara ya da beyin hücrelerine karşılık gelen kapılar da farklıdır, fakat yine de çok basit bir şekilde davranırlar. Her biri diğer kapılardan bazı sinyaller alır. Bu sinyallerin toplam gücü –yani, karşılık gelen tüm sayıların toplamı– yeterince büyük ise, kapı belli

güçteki kendi sinyalini gönderir. Tersi durumda göndermez. Bu bir nöronun 'ateşleme' yapıp yapmama kararına karşılık gelir.

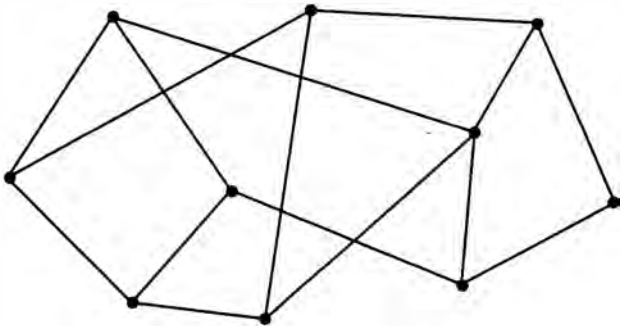
Bu modelin beynin tüm karmaşıklığını kavrayabilmesine inanmak zor olabilir. Ancak, bu kısmen ne kadar kapı olması gerektiği ya da bunların nasıl düzenlenmesi gerektiği konusunda bir şey söylememiş olmamdan kaynaklanmaktadır. Tipik bir insan beyni çok karmaşık bir şekilde düzenlenmiş yaklaşık 100 milyar nöronu içerir ve beyne ilişkin mevcut bilgilerimizle daha fazlasını söylememiz, en azından daha ayrıntılı olarak söylememiz mümkün değildir. Bununla birlikte, modern beynin nasıl çalışabileceğine ilişkin teorik bir çerçeve sunar ve insanların beynin benzer davranışlarını simüle etmelerine olanak sağlamıştır.

Haritaların renklendirilmesi ve zaman tarifelerinin hazırlanması

Bölgelere ayrılmış bir harita hazırlamakta olduğunuzu ve bölgelerin renklerini seçmek istediğinizi düşünelim. Mümkün olduğu kadar az renk kullanmak istiyorsunuz, fakat komşu iki bölgenin aynı renkte olmasını istemiyorsunuz. Şimdi de üniversitede modüllere bölünmüş bir ders için zaman çizelgesi hazırladığını düşünelim. Dersler için mümkün olan saat sayısı kısıtlı olduğundan bazı modüller diğerleriyle çatışmak durumunda kalacaktır. Elinizde hangi öğrencinin hangi modülü aldığına ilişkin bir listeniz var ve saatleri o şekilde seçmek istiyorsunuz ki iki modül ancak her ikisini de seçen hiç kimse olmadığında çatışmaktadır.

Bu iki problem birbirinden oldukça farklı görünmektedir, fakat uygun bir modelin seçimi, matematik bakış açısından bunların aynı olduğunu göstermektedir. Her iki durumda da bir şeylere (renkler, saatler) tahsis edilmesi gereken bazı nesneler (ülkeler, modüller) bulunmaktadır. Bazı nesne çiftleri, aynı tahsisi almalarına izin verilmeleri anlamında birbiriyle uyumsuzdur (komşu ülkeler, çatışmaması gereken modüller). Aslında, bu problemlerin hiçbirinde nesnelerin ne olduğu ve bunlara nelerin tahsis edildiğiyle ilgilenmediğimizden, bunları noktalar olarak temsil edebiliriz. Hangi nokta çiftlerinin birbiriyle uyumsuz olduklarını göstermek için bunları doğrularla birleştirebiliriz. Bazıları doğrularla birleştirilmiş noktaların toplamı, grafik olarak bilinen bir matematiksel yapıdır. Şekil 5 bunun basit bir örneğini göstermektedir. Grafikteki noktalara köşeler ve doğrulara da kenar adı verilmesi alışkanlıktır.

Problemi bu şekilde gösterdikten sonra, her iki durumda da görevimiz köşeleri o kadar çok küçük sayıda gruba



5. 10 köşesi ve 15 kenarı olan bir şekil.

bölmektir ki hiçbir grup bir kenarla birleştirilmiş iki kenarı içermesin. (Şekil 5'teki grafik bu türden iki gruba değil, üç gruba ayrılabilir). Bu, modellerin mümkün olduğu kadar basit yapılması için çok iyi bir diğer nedeni oluşturmaktadır: şanslıysanız, aynı model birçok farklı olgunun aynı anda incelenmesinde kullanılabilir.

'Soyut' sözcüğünün çeşitli anlamları

Bir model tasarlarken, ele alınan olgunun yalnızca onun davranışının anlaşılmasında önemli olan özellikleri soyutlanarak olguya ilişkin mümkün olduğu kadar çok şey göz ardı edilmeye çalışılır. Tartıştığım örneklerde taşlar tek noktalara, ülkenin tüm nüfusu tek bir sayıya, beyin çok basit matematiksel bir kurala uyan kapılar ağına ve moleküller arasındaki etkileşimler hiçbir şeye indirgenmiştir. Ortaya çıkan matematiksel yapılar modellenen somut yapıların soyut gösterimidir.

Matematik bu iki anlamda soyut bir konudur: soyutlananlar bir problemin önemli özellikleridir ve matematik somut olmayan ve elle tutulamayan nesneleri ele alır. Sonraki bölümde, önceki kesimdeki örneğin bize bir fikir vermiş olduğu, matematiğin daha derin bir soyutlama anlamı ele alınacaktır. Grafik, birçok kullanım alanı olan çok esnek bir modeldir. Ancak grafikleri incelediğimizde bu kullanımları akılda bulundurmamız gerekmemektedir: yine noktaların bölgeleri, dersleri ya da çok farklı bir şeyi temsil edip etmemesi önemli değildir. Bir grafik teorisyeni gerçek dünyanın tümüyle dışına çıkabilir ve saf soyutlama dünyasına girer.

II. Bölüm

SAYILAR VE SOYUTLAMA

Soyut yöntem

Birkaç yıl önce *Times Literary Supplement*'ta yayınlanan bir inceleme şu paragrafla başlıyordu:

> 0 x 0 = 0 ve 1 x 1 = 1 veri olduğunda, kendi kareleri olan sayıların mevcut olduğu sonucu ortaya çıkar. Fakat bundan da sayıların olduğu ortaya çıkar. Doğal bir basitliğin tek bir adımıyla elementer matematikten şaşırtıcı ve çok tartışmalı bir felsefi sonuca ilerlemiş bulunuyoruz: sayıların mevcut olduğu sonucuna. Bunun çok daha güç bir şey olduğunu düşünmüş olmalısınız.
>
> Jerrold J. Katz'ın yazdığı *Realistic Rationalism* adlı kitap için A.W. Moore'un yazdığı değerlendirme yazısı, T.L.S., 11 Eylül 1998.

Bu düşünce birçok yönden eleştirilebilir, fakat kitabı değerlendiren kişi de dahil olmak üzere, hiç kimsenin onu

ciddiye alması olası değildir. Bununla birlikte, sayıların mevcut olup olmadığı sorusunu ciddiye alan felsefeciler elbette bulunmaktadır ve bu onları, sayıların mevcut olmasını doğal olarak karşılayan ya da sorulan soruyu anlamayan bazı matematikçilerden ayırmaktadır. Bu bölümün esas amacı, görünüşte önemli olan bu sorunu matematikçilerin nasıl mutlu bir şekilde göz ardı edebildiklerini, hatta etmeleri gerektiğini açıklamaktır.

Satranç oyununa ilişkin paralel bir argümana baktığımızda, sayıların mevcudiyetine ilişkin 'doğal basitlik' argümanının saçmalığı çok açık hale gelir. Satrançta siyah şahın bazen bir karede çapraz hareket etmesine izin verilmesi, bazen bir kare çapraz hareket etmesine izin verilen satranç taşlarının olduğunu ortaya koyar. Fakat bundan da satranç taşları olduğu sonucu çıkar. Elbette, bununla insanların bazen satranç taşları yaptıkları biçimindeki dünyevi ifadeyi kastetmiyorum – ne de olsa bu taşlar olmadan da satranç oyunu oynanabilir. Fakat çok daha 'şaşırtıcı' felsefi sonucu, satranç taşlarının fiziksel belirtilerinden bağımsız olarak var olduklarını anlatmak istiyorum.

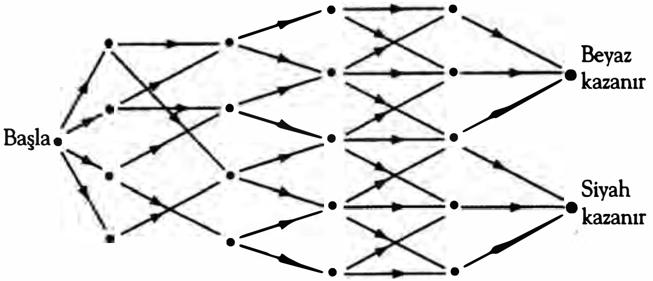
Satrançta siyah şah nedir? Bu tuhaf bir sorudur ve bunu ele almanın en tatmin edici yolu, bunun bir ölçüde yanından dolaşmak olarak görünmektedir. Bir satranç tahtasına işaret ederek oyunun kurallarını anlatmaktan, bunu yaparken de belki siyah şaha özellikle dikkat çekmekten başka ne yapılabilir? Siyah şaha ilişkin olarak önemli olan onun varlığı veya içsel doğası değil, oyunda oynadığı roldür.

Bazen ifade edildiği gibi, matematikteki soyut yöntem, matematiksel nesnelere karşı benzer bir tavır gösterildiği

zaman ortaya çıkan şeydir. Bu tavır şu sloganla özetlenebilir: bir matematiksel nesne *yaptığı şeydir*. Benzer sloganlar dil felsefesinde birçok kez görülmüştür ve bunlar oldukça tartışmalı olabilmektedir. Buna sırasıyla Saussure ve Wittgenstein'dan iki örnek olarak şunlar verilebilir: 'Dilde yalnızca farklılıklar vardır' ve 'Bir sözcüğün anlamı onun dildeki kullanımıdır'. Bunlara mantıksal pozitivistlerin toparlayıcı şu haykırışları eklenebilir: 'Bir ifadenin anlamı, onun kanıtlanma yöntemidir.' Eğer bu söylediklerimi felsefi nedenlerden dolayı hoş bulmuyorsanız, o zaman bunu dogmatik bir ifade olarak değil de, bazen benimsenebilecek bir tavır olarak kabul edin. Aslında, göstermeyi ümit ettiğim gibi, yüksek matematiği düzgün bir şekilde anlamak istiyorsak, bunun benimsenebilmesi önemlidir.

Taşları olmayan satranç

Benim argümanım ona bağlı olmamakla birlikte, satrancın ya da benzer bir başka oyunun bir grafik aracılığıyla modellenebileceğini görmek şaşırtıcıdır. (Grafikler önceki bölümün sonunda anlatılmıştı.) Grafiğin köşeleri oyundaki mümkün konumları temsil etmektedir. Eğer oyun sırası P konumunda gelen kişi Q konumuyla sonuçlanan bir meşru hareket yaparsa, P ve Q köşeleri bir kenar ile birleştirilir. Tekrar Q'dan P'ye geri gitmek mümkün olamayabileceği için, bu kenarların yönlerini belirtmek için bunların üstlerinde okların olması gerekir. Bazı köşelerde beyazın, diğerlerinde de siyahın kazandığı kabul edilir. Oyun belli bir köşede başlar ve bu köşe oyunun başlangıç konumuna



6. Oyuna beyaz başlar ve kazanma stratejisine sahiptir.

karşılık gelir. Sonra oyuncular kenarlar boyunca ilerlemek için sırayla oynarlar. Birinci oyuncu beyazın kazandığı köşelerden birine ulaşmaya çalışmakta ve ikinci oyuncu siyahın kazandığı köşelere ulaşmaya çalışmaktadır. Bu tür bir oyunun çok daha basit bir biçimi Şekil 6'da gösterilmiştir. (Bu oyunda beyazın bir kazanma stratejisine sahip olduğu kolaylıkla görülebilir.)

Satrancın bu grafik modeli, çok fazla sayıda mümkün satranç konumundan dolayı, ortaya çıkan oyunun satrancın tam olarak eşdeğeri olması anlamında mükemmeldir. Bununla birlikte, bunu anlatırken hiçbir zaman satrançtan söz etmedim. Bu bakış açısıyla, siyah şahın mevcut olup olmadığının sorulması çok tuhaf görünmektedir; satranç tahtası ve taşlar, devasa bir grafikte yer alan şaşırtıcı sayıdaki köşe ve kenarlar konusunda düşünmemize yardım eden uygun düzenleme ilkeleridir. 'Siyah şah denetim altında' dersek, bu bize oyuncuların bunlardan birine ulaştıklarını söyleyen çok fazla sayıdaki köşelerden birini belirten bir ifadenin kısaltılmış biçiminden başka bir şey değildir.

'Doğal' deyimi matematikçilerin 1, 2, 3, 4,... gibi bildik sayılara verdiği addır. Bunlar matematiksel nesnelerin en temel olanları arasındadır, fakat bizi soyut biçimde düşünmeye teşvik etmezler. Sonuçta 5 gibi bir sayının *ne yaptığı* konusunda ne söylenebilir? Bu sayı bir satranç taşı gibi hareket etmez. Buna karşılık, içsel doğası, Şekil 7'deki resme baktığımızda hemen kavradığımız bir tür saf beşliğe sahip görünmektedir.

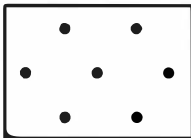
Bununla birlikte, büyük sayıları ele aldığımızda, bu netlik daha azdır. Şekil 8 bize 7, 12 ve 47 sayılarını göstermektedir. Belki de bazı kişiler birinci resimdeki yediliği anında kavrarlar, fakat 'dış noktalar bir altıgen oluşturuyor, bu yüzden merkezdekiyle birlikte 6 + 1 = 7'yi elde ederiz' türünden bir düşünce aklımızdan geçer. Benzer şekilde, 12 de muhtemelen 3 x 4 ya da 2 x 6 olarak düşünülecektir. 47'ye gelince, örneğin, 46'nın tersine, bu sayıdaki nesne grubuna ilişkin

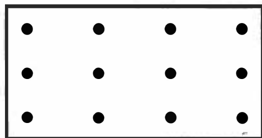


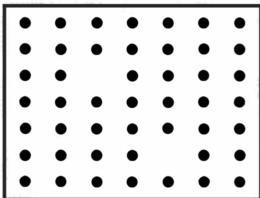


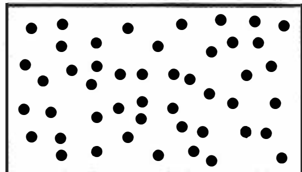


7. Beş kavramı.









8. 7, 12 ve 47'yi (iki kez) göstermenin yolları.

olarak özellikle ayırt edici bir şey bulunmamaktadır. Bunlar 7 x 7 gibi iki noktası eksik bir ızgara biçiminde düzenlenirse, orada kaç tane olduğunu hemen söyleyebilmek için 7 x 7 – 2 = 49 – 2 = 47'ye ilişkin bilgimizi kullanabiliriz. Eğer bu yapılmazsa, bunları saymak dışında fazla seçeneğimiz olmaz, bu defa 47'yi 46'dan sonra gelen sayı ve bu sayıyı da 45'ten sonra gelen sayı olarak düşünürüz ve bu böyle sürüp gider.

Diğer bir deyişle, sayıları izole edilmiş nesneler olarak düşünmeyi bırakarak onları özellikleri aracılığıyla, diğer sayılarla ilişkileri aracılığıyla ve bir *sayı sistemin*deki rolleri yoluyla kavramaya başlamadan önce bunların çok büyük olmaları gerekmez. Sayının ne 'yaptığı'nı söylerken bunu anlatmak istiyorum.

Şimdi açıklığa kavuşmaya başladığı gibi, sayı kavramı aritmetik toplam ve çıkarma işlemleriyle yakından ilişkilidir: örneğin, aritmetiğe ilişkin bir fikri olmayan biri

1.000.000.017 gibi bir sayının anlamını kavramakta zorluk çekebilir. Sayı sistemi yalnızca bir sayılar toplamı değildir, fakat aritmetik işlemin kurallarıyla birlikte bir sayılar toplamıdır. Soyut yaklaşımı özetlemenin bir yolu da sayıların kendileri değil, kurallar üzerinde düşünmektir. Bu bakış açısıyla sayılar bir tür oyundaki simgelerdir (veya belki de bunlara sayaçlar demeliyiz).

Kuralların ne olduğuna ilişkin bir fikir edinebilmek için basit bir matematiksel soruyu ele alalım: $38 \times 263 = 9994$ olduğuna inanmak isteyen biri ne yapmalıdır? Çoğu kişi muhtemelen bir hesap makinesinde bunu kontrol edecektir, fakat bu herhangi bir nedenle mümkün olmazsa, o zaman şöyle bir akıl yürütecektir.

$$\begin{aligned} 38 \times 263 &= 30 \times 263 + 8 \times 263 \\ &= 30 \times 200 + 30 \times 60 + 30 \times 3 + 8 \times 200 + 8 \times 60 + 8 \times 3 \\ &= 6000 + 1800 + 90 + 1600 + 480 + 24 \\ &= 9400 + 570 + 24 \\ &= 9994 \end{aligned}$$

Ama bu adımların bu kadar belirgin biçimde doğru görünmesinin nedeni nedir? Örneğin, bir kişi $30 \times 200 = 6000$ olduğuna niçin anında inanır? 30'un anlamı 3×10'dur ve 200'ün anlamı $2 \times (10 \times 10)$'dur, bu yüzden de $30 \times 200 = (3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10))$ olduğu konusunda tam bir güvenimiz vardır. Fakat bu niçin 6000'dir?

Normal olarak hiç kimse bu soruyu sorma zahmetine katlanmaz, fakat eğer birisi sorarsa şöyle diyebiliriz,

$$(3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10)) = (3 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10) = 6 \times 1000 = 6000$$

Bu konuda tam olarak düşünmeden, çarpma hakkında aşina olduğumuz iki olguyu kullanırız: iki sayıyı çarptığınızda bunların nasıl paranteze alınacakları hiç fark etmez. Örneğin, 7 x 8 = 8 x 7'dir ve (31 x 34) x 35 = 31 x (34 x 35)'tir. Bu iki örneğin ikincisindeki ara hesaplamaların parantezden kesin olarak etkilendiğine dikkat ediniz – fakat nihai cevabın aynı olacağını bilmekteyiz.

Bu iki kural çarpmanın *değişme* ve *birleşme* kuralı olarak adlandırılır. Şimdi, bu ikisi dahil olmak üzere, toplama ve çıkarma yaparken genellikle kullandığımız birkaç kuralın bir listesini vereyim.

A1 Toplamada değişme kuralı: herhangi a ve b sayıları için a + b = b + a'dır.

A2 Toplamada birleşme kuralı: herhangi a, b ve c sayıları için a + (b + c) = (a + b) + c'dir.

M1 Çarpmada değişme kuralı: herhangi a ve b sayıları için ab = ba'dır.

M2 Çarpmada birleşme kuralı: herhangi a, b ve c sayıları için a(bc) = (ab)c'dir.

M3 1 sayısı çarpımda özdeştir: herhangi bir a sayısı için 1a = a'dır.

D Dağılma kuralı: herhangi a, b ve c sayıları için (a + b) c = ac + bc'dir.

Bu kuralları, bunların kendi içinde ilginç olduklarına sizi ikna etmek için değil, bunların oldukça basit matematik ifadeler olmalarına rağmen düşüncemizde oynadıkları role dikkatinizi çekmek amacıyla sıraladım. 2 x 3 =

6 olduğuna ilişkin güvenimiz muhtemelen şu türden bir görüntüye dayanmaktadır.

*   *   *

*   *   *

Öte yandan, 38 x 263 = 9994 olduğunu göstermek istediğimizde doğrudan bir yaklaşım söz konusu değildir. Bu yüzden, bu daha karmaşık olgu konusunda değişme, birleşme ve dağıtım kurallarını kullanarak tümüyle farklı biçimde düşünürüz. Bu kurallara uyarsak, sonuca da inanırız. Dahası, 9994 nesnenin nasıl görüneceğine ilişkin kesinlikle hiçbir görsel düşüncemiz olmasa bile buna inanırız.

Sıfır

Tarihsel olarak, sıfır sayısı düşüncesi pozitif tamsayılardan daha sonra ortaya çıkmıştır. Bu sayı birçok kişiye şu türden ilham verici sorulara yol açan gizemli ve paradoksal bir kavram olarak görünmüştür: 'Bir şey nasıl var olur ve bununla birlikte hiçbir şey olmaz?' Ancak soyut bakış açısıyla sıfırın ne olduğu çok açıktır – sayı sistemimize şu özel kuralla birlikte girmiş yeni bir simgeden başka bir şey değildir.

A3 0 bir toplama özdeşliğidir: Herhangi bir a sayısı için $0 + a = 0$'dır.

Sıfır sayısı hakkında bilmemiz gereken şey bu kadardır. Neyi ifade ettiğini değil, yalnızca ne yaptığını söyleyen küçük bir kural.

Herhangi bir sayıyı 0 ile çarptığımızda 0 elde etmemiz gibi sıfırın diğer özellikleri konusunda ne söylenebilir? Bu kuralı listeye eklemedim, çünkü bu **A3**'ten ve daha önceki kurallarımızdan çıkarılabilir. Burada, örneğin, 2 sayısı 1 + 1 olarak tanımlandığında 0 x 2 = 0 olduğu nasıl gösterilecektir? Birincisi, **M1** 0 x 2 = 2 x 0 olduğunu söyler. Bundan sonra **D** kuralı (1 + 1) x 0 = 1 x 0 + 1 x 0 olduğunu söyler. Fakat **M3** kuralına göre 1 x 0 = 0'dır, bu yüzden bu 0 + 0'a eşittir. **A3** kuralı 0 + 0 = 0'ı dolaylı olarak ifade eder ve argüman sona ermiş olur.

Alternatif olarak, soyut olmayan argüman bu şekilde olabilir: '0 x 2 *olmayan ikilerin toplamı* anlamına gelir ve bunu yaptığımızda elde bir şey kalmaz, yani 0 kalır.' Fakat bu tür bir düşünme oğlum John tarafından (altı yaşındayken) sorulan şu türden soruların yanıtlanmasını güçleştirir: hiçbir şeyle hiçbir şeyi çarptığımızda elimizde hiçbir şey *kalmazsa*, hiçbir şeyle hiçbir şeyin çarpımı nasıl hiçbir şey olabilir? O zaman uygun olmayan iyi bir yanıt, bunun aşağıdaki gibi kurallardan çıkarılabileceği biçimindeydi. (Her adımdan sonra, kullanmakta olduğum kuralı sıraladım.)

0	= 1 x 0	**M3**
	= (0 + 1) x 0	**A3**
	= 0 x 0 + 1 x 0	**D**
	= 0 x 0 + 0	**M3**
	= 0 + 0 x 0	**A1**
	= 0 x 0	**A3**

Bu uzun kanıtlamaları niçin veriyorum? Yine, bunun nedeni, bu kanıtlamaları matematiksel olarak ilginç bul-

mam değildir. Tersine, matematiksel ifadeleri somut olarak (ifadenin anlamı üzerinde düşünerek) değil de, soyut olarak (birkaç basit kural kullanarak ve sayıların aslında neler oldukları üzerinde durmayarak) doğrulamanın ne anlama geldiğini göstermek istiyorum. Elbette, anlamları ve zihinsel resimleri matematiksel nesnelerle ilişkilendirmek çok yararlıdır, fakat bu kitapta birçok kez göreceğimiz gibi, genellikle bu ilişkiler yeni ve tanıdık olmayan bağlamlarda ne yapmamız gerektiğini söylemeye yetmez. O zaman soyut yöntem kaçınılmaz hale gelir.

Negatif sayılar ve kesirler

Küçük çocuklara matematik öğretme deneyimi olan herkesin bildiği gibi, çıkarma ve bölmede, toplama ve çarpmayla karşılaştırıldığında, bunların anlaşılmasını güçleştiren bazı dolaylı şeyler vardır. Çıkarmayı açıklamak için elbette çekip alma kavramını kullanabilir ve 'Başta beş portakalımız olsa ve bunların ikisini yesek geriye kaç portakal kalır?' türünden sorular sorabiliriz. Ancak bu her zaman bunun hakkında düşünmenin en iyi yolu değildir. Örneğin, 100'den 98'i çıkarırsak, 100'den 98'in alınmasını değil, 100'e tamamlamak için 98'e ne eklenmesi gerektiğini düşünmek daha iyi olacaktır. O zaman, aslında kişinin fiilen yaptığı şey, elbette x harfinin bu hesaplama sırasında insanın aklından geçmesi olağandışı olmakla birlikte, $98 + x = 100$ denklemini çözmektir. Benzer şekilde, bölme işlemi konusunda da iki düşünme şekli vardır. 50'nin 10 ile bölünmesinin anlamı-

nı açıklamak için ya 'Eğer elli nesne on eşit gruba ayrılırsa, her grupta kaç tane olacaktır?' ya da 'Elli nesne onluk gruplara ayrılırsa kaç tane grup olacaktır?' sorusunu sorabiliriz. İkinci yaklaşım şu soruyla eşdeğerdir, 'Elliyi elde etmek için on sayısı ne ile çarpılmalıdır, bu da $10x = 50$ denkleminin çözümüyle eşdeğerdir.

Çocuklara çıkarma ve bölme işlemlerini açıklamadaki bir başka güçlük bunların her zaman mümkün olamamasıdır. Örneğin, içinde yedi tane portakal olan bir kâseden on tane portakal alamazsınız ve üç çocuk on bir bilyeyi eşit biçimde paylaşamaz. Fakat bu durum, yetişkinlerin 7'den 10'u çıkarmalarını ya da 11'i 3'e bölmelerini ve sırasıyla, -3 ve 11/3 cevaplarını elde etmelerini engellemez. O zaman şu soru ortaya çıkar: sayılar, yani sırasıyla -3 ve 11/3 aslında mevcut mudur ve mevcutlarsa bunlar nedir?

Soyut bakış açısıyla, bu soruları, sıfıra ilişkin benzer soruları ele alırken yaptığımız gibi ele alabiliriz: yani bu soruları unutarak. -3'e ilişkin olarak bilmemiz gereken tek şey bunu 3 sayısına eklediğimizde sıfırı el ettiğimizdir ve 11/3 hakkında bilmemiz gereken tek şey bunu 3 ile çarptığımızda 11'i elde ettiğimizdir. Bunlar kuraldır ve daha önceki kurallarla birlikte daha büyük bir sayı sisteminde aritmetik işlem yapmamıza olanak sağlarlar. Sayı sistemimizi bu şekilde genişletmeyi niçin istiyoruz? Çünkü bu bize, a ve b sayıları ikinci denklemde 0 dışında ne olursa olsun, $x + a = b$ ve $a x = b$ gibi denklemlerin çözülebileceği bir model sağlar. Bunu bir başka şekilde ifade edecek olursak, 0 ile bölmeye çalışmadıkça, çıkarma ve bölmenin her zaman mümkün olduğu bir model verir. (Sıfıra bölme bu bölümde daha sonra tartışılacaktır.)

Gerçekte, sayı sistemimizi bu şekilde genişletmek için yalnızca iki ek kurala ihtiyacımız bulunmaktadır: negatif sayıları veren ve kesirleri ya da alışıldığı biçimiyle *rasyonel* sayıları veren iki kurala.

A4 Toplanan tersler: her a sayısı için öyle bir b sayısı vardır ki a + b = 0'ı verir.

M4 Çarpılan tersler: her a sayısı için 0'dan farklı bir c sayısı vardır ki ac = 1'i verir.

Bu kurallarla donatılmış olarak, -a ve 1/a'yı sırasıyla, **A4**'teki b ve **M4**'teki c sayılarını göstermek üzere düşünebiliriz. p/q gibi daha genel ifadelerde, bu, p'nin 1/q ile çarpımını ifade eder.

A4 ve **M4** kuralları kısaltma kuralları olarak bilinen diğer iki kural anlamına gelir.

A5 Toplama için kısaltma kuralı: a, b ve c herhangi üç sayı ise ve a + b = a + c ise o zaman b=c'dir.

M5 Çarpma için kısaltma kuralı: a, b ve c herhangi üç sayı ise ve a sıfır değilse ve ab = ac ise, o zaman b=c olur.

Tahmin edebileceğiniz gibi, bunların birincisi her iki tarafa -a ekleyerek ve ikincisi de her iki tarafı 1/a ile çarparak kanıtlanabilir. **A5** ve **M5**'in daha önceki kurallardan farklı olan statülerine dikkat ediniz; bunlar iyi bir oyuna başlangıç için geliştirdiğimiz kurallardan çok daha önceki kuralların *sonuçları*dır.

2/5 ve 3/7 gibi iki kesri toplamamız istenirse, alışılmış yöntem onlara şu şekilde ortak payda sağlamaktır:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

Bu teknik ve bunun benzeri olan diğerleri, yeni kural-

larımız kullanılarak kanıtlanabilir. Örneğin,

$$35x\frac{14}{35} = 35x(14x\frac{1}{35}) = (35x14)x\frac{1}{35} = (14x35)x\frac{1}{35}$$

$$= 14x(35x\frac{1}{35} = 14x1 = 14,$$

ve

$$35x\frac{2}{5} = (5x7)\,x\,(2x\frac{1}{5}) = (7x5)\,x\,(\frac{1}{5}x2) = (7x\,(5x\frac{1}{5}))\,x2$$

$$= (7x1)\ x\ 2 = 7x2 = 14$$

Bu yüzden, hesaplama sırasında düşündüğümüz gibi, **M5** kuralı kullanıldığında 2/5 ve 14/35 eşittir.

Benzer şekilde, negatif sayılara ilişkin olarak bildiğimiz doğruları kanıtlayabiliriz. Bu kurallardan (-1) x (-1) = 1 olduğunu çıkarabiliriz ve bu çıkarım 0 x 0 = 0'ın kanıtlanmasına çok benzer.

Birçok insana negatif sayılar niçin pozitif sayılardan daha az gerçel (reel) görünür? Muhtemelen, bunun nedeni, küçük nesne gruplarını saymanın temel bir insan faaliyeti olmasıdır ve bunu yaparken negatif sayıları kullanmamızdır. Fakat bu, bir model olarak düşündüğümüz doğal sayılar sisteminin genişletilmiş sayı sisteminin yararlı olmadığı durumlarda yararlı olması anlamına gelir. Isı, tarih ya da banka hesap numarasını düşünmek istersek negatif sayılar yararlı *hale* gelirler. Genişletilmiş sayı sistemi mantıksal açıdan tutarlı olduğu sürece bunun bir model olarak kullanılmasında bir sakınca yoktur.

Doğal sayı sistemini bir model olarak nitelendirmek tuhaf olabilir. Belli bir idealleştirme olmaksızın gerçekte

sayı saydığımız doğru değil midir? Evet, sayı sayarız, **fakat** bu yöntem her zaman uygun değildir, hatta mümkün bile değildir. Matematiksel açıdan 1394840275936492349 87 sayısına ilişkin olarak yanlış olan bir şey yoktur, fakat seçimde Florida'daki oyları bile sayamıyorsak 1394840275936492349 87 nesnenin toplamı konusunda emin olmamız düşünülemez. İki yaprak yığınını alsanız ve bunlara bir üçüncüsünü ekleseniz ortaya üç yaprak yığını değil, büyük bir yaprak yığını çıkar. Bir yağmur fırtınasını izlediğinizde, Wittgenstein'ın dediği gibi, '"Kaç yağmur damlası gördünüz?" sorusunun doğru yanıtı, bir sayı olmamasından değil, kaç tane olduğunu bilmemenizden dolayı *çok sayıda* biçimindedir'.

Gerçel ve karmaşık sayılar

Gerçel sayı sistemi sonsuz basamakla temsil edilen tüm sayılardan oluşur. Bu kavram, IV. Bölüm'de açıklanacak nedenlerden dolayı, göründüğünden daha karmaşıktır. Şimdilik, sayı sistemimizi rasyonel sayılardan gerçel sayılara genişletmemizin nedeninin, negatif sayılar ve kesirleri geliştirmemizle aynı olduğunu söylemekle yetineyim: bunlar başka türlü çözülemeyecek olan denklemleri çözmemize olanak sağlarlar.

Bu türden örneklerin ünlüsü $x^2 = 2$ denklemidir. Pythagoras okulu İÖ altıncı yüzyılda $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu, yani bir kesirle temsil edilemeyeceğini keşfetmiştir. (Bunun kanıtlaması sonraki bölümde verilecektir.) Bu keşif zamanında dehşete yol açmıştır, fakat şimdi biz

bir karenin çaprazının uzunluğu gibi şeyleri modellemek istediğimizde sayı sistemimizi genişletmek gerektiğini kabul ediyoruz. Bir kez daha soyut yöntem işimizi çok kolaylaştırmaktadır. Yeni bir simgeyi, $\sqrt{2}$'yi sunuyoruz ve bununla ne yapmamız gerektiğini söyleyen bir kuralımız bulunmaktadır: bunun karesi 2'dir.

Eğer iyi bir eğitim görmüşseniz, bu kuralın $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ arasında bir ayrım yapmaması nedeniyle biraz önce söylediğime karşı çıkacaksınız. Bunu halletmenin bir yolu sayı sistemimize yeni bir kavramı, *basamak* (mertebe) kavramını sokmaktır. Bir sayının diğerinden daha büyük olduğunu söylemek genellikle yararlıdır ve bunu yapmamıza olanak tanırsak $\sqrt{2}$'nin 0'dan büyük olduğu biçimindeki ek bir kuralla $\sqrt{2}$'yi ele alabiliriz. Ancak bu kural olmadan da şu türden hesaplamaları yapabiliriz:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1,$$

ve $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$ arasında ayrım *yapmamakta* aslında bir yarar vardır. Bunun nedeni yukarıdaki hesaplamanın her iki sayı için de doğru olduğunu bu şekilde bilmemizdir.

Soyut yöntem konusunda tarih boyunca duyulan kuşku, sayı sisteminin her genişletilmesinde yeni sayıları tanımlamak için kullanılan 'negatif' ve 'irrasyonel' gibi kelimelerde iz bırakmıştır. Fakat asıl demir leblebi, a ve b'nin gerçel sayılar ve i'nin -1'in karekökü olduğu a+bi biçimindeki 'sanal' ya da 'karmaşık' sayılardır.

Somut bakış açısıyla, herhangi bir sayının karesi pozitif olduğu için -1'in karekökünü hemen reddedebiliriz: -1'in karekökü yoktur ve bu da hikâyenin sonudur. Fakat soyut bakış açısı benimsendiğinde bu karşı çıkışın önemi yoktur. $x^2 = -1$ denkleminin çözümünü işin içine sokarak ve buna i sayısı adını vererek sayı sistemimizi genişletmeyi niçin sürdürmeyelim? Bu daha önce $\sqrt{2}$'yi için içine sokmamıza göre niçin daha fazla itiraz edilebilir olsun?

Bunun bir yanıtı $\sqrt{2}$'nin istenen kesinlik derecesinde (ilke olarak) hesaplanabilen bir ondalık genişlemeye sahip olması, oysa i hakkında buna benzer bir şey söyleyemediğimiz biçiminde olabilir. Fakat bu bize daha önce bildiğimiz bir şeyi söylemekten, yani tıpkı $\sqrt{2}$'nin rasyonel bir sayı olmaması gibi, i'nin bir gerçel sayı olmamasından başka bir şey söylememektedir. Sayı sistemimizi şu gibi hesaplamaları yapabileceğimiz biçimde genişletmemizi önlememektedir.

$$\frac{1}{i-1} = \frac{i+1}{(i-1)(i+1)} = \frac{i+1}{i^2-i+i-1} = \frac{i+1}{-1-1} = -\frac{1}{2}(i+1)$$

i ve $\sqrt{2}$ arasındaki en önemli fark i'de soyut olarak düşünmek zorunda kalmamızdır, öte yandan $\sqrt{2}$'de 1,4142... gibi ya da bir birim karenin çaprazının uzunluğu gibi somut bir ifadenin kullanımı türünden alternatifin her zaman mümkün olmasıdır. i'nin niçin bu şekilde gösterilmediğini görmek için kendinize şu soruyu sorun: -1'in iki karekökünden hangisi i'dir ve hangisi -i'dir? Bu sonu anlamlı değildir, çünkü i'nin tanımlayıcı *tek* özelliği bunun karesinin -1 olmasıdır. -i ayrı özelliğe sahip olduğundan i'ye

ilişkin doğru bir ifade, ancak bunun -i'ye ilişkin ifade ile yer değiştirmesi durumunda doğru olmayı sürdürür. Bunu kavrayınca, i'nin, varlığını bağımsız olarak sürdüren saf bir Platonik nesneyi ifade edeceği görüşünün kabulü güçtür.

Burada iyi bilinen felsefi bir bilmeceyle paralellik bulunmaktadır. Sizin kırmızı rengi algıladığınızdaki duygunuz, benim yeşili algılarkenki deneyimimle aynı olabilir mi ya da bunun tersi olabilir mi? Bazı felsefeciler bu soruyu ciddiye alırlar ve 'nitelikler'i örneğin renkleri görünce yaşadığımız mutlak gerçek deneyimler olarak tanımlarlar. Bazıları da niteliklere inanmazlar. Onlara göre, 'yeşil' gibi bir renk dilbilim sistemindeki rolü aracılığıyla, yani 'ot', 'kırmızı' v.b. gibi kavramlarla ilişkisi içinde daha soyut olarak tanımlanabilir. Kişinin bu konuya ilişkin tutumunu, felsefi tartışmalar dışında, renkler hakkındaki konuşma biçiminden çıkarsamak mümkün değildir. Benzer şekilde, pratikte sayılar ve diğer matematiksel nesnelere ilişkin önemli olan tek şey bunların tabi oldukları kurallardır.

i'yi $x^2 = -1$ denklemine bir çözüm bulmak için geliştirirsek, o zaman $x^4 = -3$ ya da $2x^6 + 3x + 17 = 0$ gibi benzer denklemler ne olacaktır? Dikkati çekecek şekilde, bu türden her denklem karmaşık sayı sistemi içinde çözülebilmektedir. Diğer bir deyişle, i sayısını kabul etme biçimine küçük bir yatırım yaptığımızda bu yatırım kendini birçok sayı biçiminde geri ödemektedir. Karmaşık bir tarihi olan ve genellikle Gauss'a atfedilen bu olgu cebirin temel teoremi olarak bilinmektedir ve i'ye ilişkin doğal bir şey olduğu konusunda çok ikna edici kanıtlar sunmaktadır. i elmadan oluşan bir sepet, i saat süren bir otomobil yolculuğu ve i pound açık vermiş bir banka hesabını düşünmek mümkün

olmasa bile, karmaşık sayı sistemi mühendislerin yanı sıra matematikçiler ve bilim insanları için vazgeçilmez bir hale gelmiştir – örneğin, kuantum mekaniği teorisi büyük ölçüde karmaşık sayılara dayanmaktadır. Bu durum genel bir ilkeyi en iyi biçimde göstermektedir: bir soyut matematiksel yapı yeterince doğal ise, bir model olarak yararlı olması hemen hemen kesindir.

Sonsuza ilk bakış

Soyut olarak düşünmeyi öğrendikten sonra, bu bir ölçüde dengeyi sağlamak konusunda kaygılanmadan birdenbire bisiklet sürmek gibi keyifli olabilir. Bununla birlikte, soyut yöntemin, para basma yetkisine benzediği biçiminde bir izlenim vermek istemiyorum. i'nin sayı sistemine sokulmasını sonsuz sayısının sokulması ile karşılaştırmak ilginçtir. Önce bizi durduracak herhangi bir şey bulunmamaktadır: sonsuz, 1'in 0'a bölünmesi gibi bir şeyi ifade etmelidir, bu yüzden ∞ niçin soyut bir simge olmasın ve 0x1 denkleminin çözümü olarak niçin düşünülmesin?

Bu düşüncedeki sorun, aritmetik işlem yapmaya çalışınca ortaya çıkar. Burada, örneğin, çarpmanın birleşme özelliği olan **M2**'nin doğal bir sonucu ve $0 \times 2 = 0$ gerçeği ortaya çıkar.

$$1 = \infty \times 0 = \infty \times (0 \times 2) = (\infty \times 0) \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

Bu, $0 \times = 1$ denkleminin bir çözümünün var olmasının bir *tutarsızlığa* yol açtığını gösterir. Bu, sonsuzun mevcut

olmadığı anlamına mı gelir? Hayır, yalnızca, sonsuzun doğal düşüncesinin aritmetiğin kuralları ile uyumlu olmadığı anlamına gelir. Bazen sayı sistemini ∞ simgesini içerecek şekilde genişletmek ve genişletilmiş sayı sisteminde bu kuralların her zaman geçerli olmadığını kabul etmek yararlıdır. Ancak insan genellikle kuralları sürdürmeyi ve bu sonsuz olmaksızın işleri halletmeyi tercih eder.

Sayıların negatif ve kesirli kuvvetlerinin alınması

Soyut yöntemin en önemli erdemlerinden biri, bildik olmayan durumlarda bildik kavramlara anlam kazandırmayı mümkün hale getirmesidir. 'Anlam kazandırmak' deyimi oldukça uygundur, çünkü yaptığımız şey, daha önce var olan bir anlamı keşfetmekten daha çok, budur. Buna basit örnek, bir sayının kuvvetinin alınmasıdır.

Eğer n bir pozitif tamsayı ise, a^n n adet a'nın birlikte çarpımını ifade eder. Örneğin, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ ve $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$'dir. Fakat bu şekilde tanımlandığında $2^{2/3}$ gibi bir ifadenin yorumlanması kolay değildir, çünkü bir buçuk iki alınıp bunlar birbiriyle çarpılamaz. Bu türden bir problemi ele almada soyut yöntem nedir? Bir kez daha, içerdiği anlama bakmak –bu örnekte a^n gibi ifadelere – değil, kurallar konusunda düşünmektir.

Sayıların kuvvetlerinin alınmasına ilişkin iki temel kural şunlardır.

E1 Herhangi bir gerçel sayı a için $a^1 = a$'dır.

E2 Herhangi bir gerçel sayı a ve herhangi bir doğal sayı çifti m ve n için $a^{m+n} = a^m \times a^n$'dir.

Örneğin, 2^5 ifadesi 2 x 2x 2 x 2 x 2 anlamına geldiğinden ve 2^3 x 2^2 de (2 x 2 x 2) x (2 x2) anlamına geldiğinden $2^5 = 2^3 \times 2^2$'dir. Çarpmanın birleşme özelliğinden dolayı bunlar aynı sayılardır.

Bu iki kuraldan hemen daha önce bildiğimiz doğruları elde ederiz. Örneğin, $a^2 = a^{1+1}$'dir ve bu da **E2** kullanıldığında $a^1 \times a^1$'dir. **E1** yoluyla bu, olması gerektiği gibi, a x a'dır. Fakat şimdi daha fazlasını yapabilme konumundayız. $2^{3/2}$ sayısına x diyelim. O zaman $x \times x = 2^{3/2} \times 2^{3/2}$ olur ve bu da **E2** aracılıyla $2^{3/2+3/2} = 8$'dir. Diğer bir deyişle, $x^2 = 8$ olur. Bu x'in değerini tam olarak belirlemez, çünkü 8'in iki karekökü vardır ve bu yüzden genellikle aşağıdaki kalıp benimsenir.

E3 Eğer a> 0 ve b gerçel bir sayı ise, a^b pozitiftir.

E3'ü de kullanarak $2^{3/2}$'nin 8'in pozitif karekökü olduğunu buluruz.

Bu $2^{3/2}$'nin 'gerçek değerinin' keşfedilmesi değildir. Ancak $2^{3/2}$'ifadesine getirdiğimiz yorum da keyfi değildir – bu, ancak **E1**, **E2** ve **E3** kurallarını korumak istediğimiz zaman mümkündür.

Benzer bir argüman, en azından a'nın 0 olmadığı durumlarda a^0'ı yorumlamamıza olanak sağlar. **E1** ve **E2** kullanıldığında $a = a^{1+0} = a \times a^n$ olduğunu biliyoruz. O zaman kısaltma kuralı **M5** a'nın değeri ne olursa olsun, $a^0 = 1$ olduğunu dolaylı olarak ifade eder. Negatif kuvvetler için, a^b'nin değerini bilirsek, $1 = a^0 = a^{b+(-b)} = a^b \times a^{-b}$ olur ve buradan $a^{-b} = 1/a^b$ olur. Örneğin, $2^{-3/2}$ sayısı $1/\sqrt{8}$'dir.

Soyut olarak ele alındığında çok daha basitleşen bir diğer kavram logaritmadır. Bu kitapta logaritmalar konu-

sunda fazla bir şey söylemeyeceğim, fakat bunlar sizi kaygılandırıyorsa, bunları kullanmak için bilmeniz gereken tek şeyin aşağıdaki üç kural olduğu konusunda size güvence verebilirim. (Eğer 10 tabanı yerine e tabanına göre logaritmaları istiyorsanız, **L1**'deki 10'u e ile değiştirebilirsiniz.)

L1 log(10) = 1

L2 log(xy) = log(x) + log(y)

L3 Eğer x < y ise log(x) < log(y)'dir.

Örneğin, log(30)'un 3/2'den küçük olduğunu görmek için **L1** ve **L2** kullanılarak

log(1000) = log(10) + log(100) = log(10) + log(10) + log(10) = 3 olduğuna dikkat ediniz.

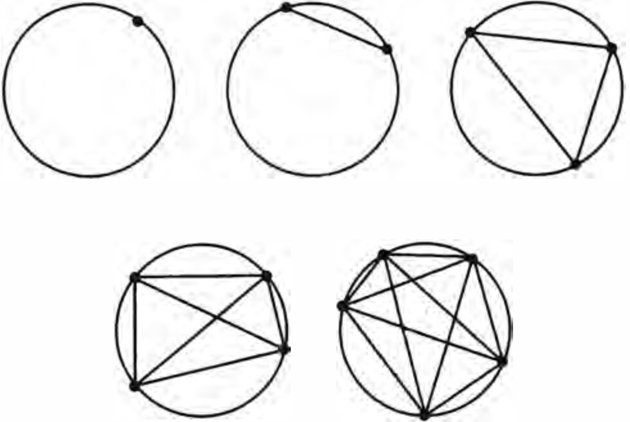
Fakat **L2** ve **L2** kullanıldığında 2log(30) = log(30) + log(30) = log(900) ve **L3** kullanıldığında log(900) < log (1000) olur. Bu nedenle, 2log(30) <3 olduğundan, log(30) < 3/2'dir.

Kitabın ileriki bölümlerinde niteliği bunlara benzer birçok kavramı tartışacağım. Bunlar somut olarak anlamaya çalıştığınızda şaşırtıcıdır, fakat bunların *ne* oldukları konusunda kaygı duymaktan vazgeçer ve soyut yöntemi kullanarak kendinizi gevşetirseniz anlaşılmazlıkları ortadan kalkar.

III. Bölüm

KANITLAMALAR

Aşağıdaki şekil, birincisinin çevresinde bir, ikincisinin çevresinde iki nokta olan ve diğerleri de bu şekilde devam eden üç daireyi göstermektedir. Bu sınır noktala-



9. Daireyi bölgelere ayırmak.

rını birleştiren olanaklı tüm doğrular da çizilmiştir ve bu doğrular daireleri bölgelere ayırmaktadır. Her dairedeki bölgeleri saydığımızda 1, 2, 4, 8, 16 dizisini elde ederiz. Bu dizi hemen görülebilir: sınıra yeni bir nokta eklendiğinde bölgelerin sayısı iki katına çıkar gibidir, böylece en azından hiçbir üç doğru bir noktada birleşmediğinde n nokta 2^{n-1} bölgeyi tanımlamaktadır.

Ancak matematikçiler "gibi görünmektedir" ifadesiyle ender olarak tatmin olurlar. Tersine, bir *kanıt*, bir ifadeyi mümkün tüm kuşkuların ötesine taşıyan bir argümanı talep ederler. Öyle olsa da bunun anlamı nedir? Genellikle bir ifade *mantıklı* tüm kuşkuların ötesinde doğru olarak belirlenebilirse de, bir argümanın hiç kuşkuya yer bırakmadığını iddia etmek biraz fazla ileri gitmek olur. Tarihçiler bir zamanlar kuşku götürmediği düşünülen, fakat o zamandan beri yanlış oldukları ortaya konulan, bazıları matematiksel birçok ifade örneği verebilirler. Günümüz matematiğinin teoremleri bundan niye farklı olsun ki? Bu soruyu birkaç kanıtlama örneği vererek ve onlardan bazı genel sonuçlar çıkararak yanıtlayacağım.

İkinin karekökünün irrasyonelliği

Son bölümde değindiğim gibi, bir sayı, p ve q tam sayı olmak üzere p/q kesiri biçiminde yazılabiliyorsa rasyonel ve yazılamıyorsa irrasyonel olarak adlandırılır. Matematikte en ünlü kanıtlamalardan biri $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu ortaya koyar. *Reductio ad absurdum* ya da çelişki yoluyla kanıtlama olarak bilinen bir tekniği gösterir.

Bu türden bir kanıtlama, kanıtlanmak istenen sonucun *yanlış* olduğu varsayımıyla başlar. Bu, kanıtlamanın tuhaf bir yolu gibi görünebilir, fakat aslında aynı tekniği günlük konuşmalarda kullanırız. Otomobilinize bir saldırı olduğunu bildirmek için polis karakoluna gittiğinizde ve saldırganın siz olduğu suçlamasıyla karşılaştığınızda, şunu söyleyebilirsiniz: "Saldırgan ben olsaydım, bu şekilde dikkati kendime çekmeyi pek istemezdim." Ne kadar saçma olduğunu göstermek için sizin saldırgan olduğunuz (yanlış) hipotezini geçici olarak dikkate almış olurdunuz.

$\sqrt{2}$ 'nin irrasyonel olduğunu kanıtlamaya çalışıyoruz, bu yüzden bunun *rasyonel* olduğunu varsayalım ve bu varsayımın saçma sonuçlara yol açtığını göstermeye çalışalım. Birçok okuyucunun ihtiyaç duyabileceğinden daha fazla ayrıntı vererek bu argümanı bir aşamalar dizisi biçiminde yazacağım.

1. $\sqrt{2}$ rasyonel ise, $\sqrt{2}$ = p/q olan p ve q gibi sayılar bulabilirdik (tanım gereği 'rasyonel').
2. p/q gibi herhangi bir kesir r ve s'nin her ikisinin de çift olmadığı bir r/s kesirine eşittir. (En azından biri tek sayı olana kadar kesirin üstünü ve altını 2 ile bölmeye devam edin. Örneğin, 1412/1000, 706/5000 eşittir, o da 353/250'ye eşittir.)
3. Bu yüzden $\sqrt{2}$ rasyonel ise, $\sqrt{2}$ =r/s'yi olan ve her ikisi birden çift olmayan r ve s tam sayılarını bulurduk.
4. $\sqrt{2}$ = r/s ise, o zaman 2= r^2/s^2 olur (denklemin her iki tarafının karesinin alınması).
5. Eğer 2 = r^2/s^2 ise, $2s^2=r^2$ olur (her iki tarafın s^2 ile çarpılması).

6. Eğer $2 = r^2/s^2$ ise, o zaman r^2 çift sayıdır ve bu da r'nin çift sayı olduğu anlamına gelir.
7. r çift ise, o zaman belli bir t sayısı için $r = 2t$'dir (tanım gereği 'çift').
8. Eğer $2s^2 = r^2$ ve $r = 2t$ ise, o zaman $2s^2 = (2t)^2 = 4t^2$ olur ve buradan $s^2 = 2t^2$ elde edilir (her iki tarafın 2'ye bölünmesiyle).
9. Eğer $s^2 = 2t^2$ ise, o zaman s^2 çifttir ve bu da s'nin çift olduğu anlamına gelir.
10. $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğu varsayımı altında, r ve s'nin her ikisinin çift olmadığı durumda $\sqrt{2} = r/s$ olduğunu göstermiş olduk (3. adım). Böylece, r'nin çift olduğu (6. adım) ve s'nin çift olduğunu (9. adım) gösterdik. Bu açık biçimde bir çelişkidir. $\sqrt{2}$'nin rasyonel olduğu varsayımı kesinlikle yanlış olan sonuçlara yol açıyorsa, varsayımın kendisinin yanlış olması gerekir. Bu yüzden $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

Argümanın sonucunun tartışmasız olması için yukarıdaki adımlardan her birini belirgin biçimde doğru yapmaya çalıştım. Ancak, gerçekten de kuşkuya *hiç* yer bırakmadığım söylenebilir mi? Eğer birisi size $p^2 = 2q^2$ olacak şekilde p ve q gibi iki pozitif tamsayının keşfedildiğinde yaşamınızı kaybetmeniz koşuluyla on bin pound para kazanmayı teklif ederse, bu teklifi kabul eder misiniz? Eğer bunu kabul ederseniz, en küçük bir kaygı duyar mısınız?

6. adım r^2'nin çift olması durumunda r'nin de çift olması gerektiği iddiasını içermektedir. Bu çok doğal görünmektedir (tek sayıyla tek sayının çarpımı tek sayıdır) fakat $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu *mutlak bir kesinlikle* ortaya

koymaya çalışıyorsak daha fazla neden gösterebiliriz. Bunu şu beş alt adıma ayıralım:

6a. r bir tamsayıdır ve r^2 çifttir. r'nin de çift olduğunu göstermek istiyoruz. r'nin tek olduğunu varsayalım ve bir çelişki arayalım.
6b. r tek olduğundan, t tam sayısı vardır ve $r = 2t+1$'dir.
6c. Buradan $r^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1$ elde edilir.
6d. Fakat $4t^2 + 4t + 1 = 2(2t^2 + 2t) + 1$'dir ve bu tek sayıdır, r^2'nin çift olmasıyla çelişir.
6e. Bu yüzden r çifttir.

Bu şimdi 6. adımı tümüyle su götürmez hale getirir mi? Belki getirmez, çünkü 6b adımının geçerli olduğunun gösterilmesi gerekir. Bununla birlikte, tek sayı, ikinin katları olmayan sayı olarak tanımlanabilir. Bir tam sayı niçin ikinin katları ya da ikinin katlarının bir fazlası olsun? Bunu ortaya koyan argüman şöyledir:

6b1. İkinin katları ya da ikinin katlarının bir fazlası olduğunda r tam sayısına *uygun* diyelim. r uygun ise, o zaman $r = 2s$ ya da $r = 2s + 1$ olur ve s de bir tam sayıdır. Eğer $r = 2s$ ise, o zaman $r + 1 = 2s + 1$'dir ve eğer $r = 2s + 1$ ise o zaman $r + 1 = 2s + 2 = 2(s + 1)$'dir. Her iki durumda da $r + 1$ de uygundur.
6b2. $0 = 0 \times 2$ 2'nin katı olduğundan ve $1 = 0+1$ olduğundan 1 uygundur.
6b3. 6b1 adımını ardı ardına tekrarlarsak, 2'nin uygun olduğu, sonra 3'ün uygun olduğu, sonra 4'ün iyi olduğu vb. sonucuna varırız.

6b4. Bu yüzden kanıtlamaya çalıştığımız gibi, her pozitif tam sayı uygundur.

Şimdi işi bitirdik mi? Belki de bu defa en kuşkulu adım, önceki adımdan gelen, oldukça belirsiz 'vb.' sözcüğü yüzünden 6b4'tür. 6b3 adımı herhangi bir n tam sayısı verildiğinde bunun uygun olduğunun nasıl ortaya konulabileceğini gösterir. Buradaki sorun, argüman sırasında, 1'den n'ye kadar saymamızın gerekmesi ve n çok büyük olduğunda bunun çok uzun süre almasıdır. *Her* pozitif tam sayının iyi olduğunu göstermeye çalışırsak, bu durum daha da kötüleşir. O zaman argüman hiç bitmeyecekmiş gibi görünür.

Öte yandan, 6b1'den 6b3'e kadar olan adımlar herhangi bir n'nin uygun olduğunu göstermede gerçek ve belirsizlikten uzak bir yöntem verdiğinde (zamanımızın yeterli olması durumunda), bu itiraz mantıklı görünmemektedir. Aslında o kadar mantık dışıdır ki matematikçiler aşağıdaki kuralı bir aksiyom olarak benimserler.

> Her pozitif tam sayı n için onunla ilişkili S(n) ifadesinin olduğunu varsayalım. (Örneğimizde S(n) 'n'nin iyi olduğu' ifadesini göstermektedir.) S(1) doğru ise ve S(n)'nin doğruluğu her zaman S(n+1)'in doğruluğunu dolaylı olarak söylerse, o zaman S(n) her n değeri için geçerlidir.

Bu, matematiksel tümevarım ilkesi ya da onu kullanmaya alışkın olanlar için yalnızca tümevarım olarak bilinmektedir. Daha az biçimsel olarak ifade edilirse, ka-

nıtlamayı arzu ettiğimiz sonsuz sayıda ifade varsa, bunu yapmanın yollarından biri, birincisinin doğru olduğunu ve her birinin bir sonrakini dolaylı olarak ifade ettiğini göstermektir.

Son birkaç paragrafın ortaya koyduğu gibi, bir matematiksel argümanın adımları daha küçük olanlara ve bu yüzden de daha açık biçimde doğru alt adımlara bölünebilir. Bu adımlar daha sonra alt adımlara bölünür ve bu böylece sürüp gider. Matematikte temel önemi olan bir olgu, bu sürecin *sonunda bir sona ulaşması*dır. Kural olarak, adımları daha küçük olanlara ayırmayı sürdürürseniz, evrensel olarak kabul edilmiş aksiyomlarla başlayan ve yalnızca en temel mantıksal kurallar aracılığıyla arzulanan sonuca doğru ilerleyen ('eğer A doğru ise ve A, B'nin doğru olduğunu dolaylı olarak ifade ediyorsa B doğrudur' gibi) çok uzun argümanlara varırsınız.

Son paragrafta biraz önce söylediğim şey açık olmaktan çok uzaktır: aslında, XX. yüzyılın başlarındaki, büyük ölçüde Frege, Russell ve Whitehead'e dayanan en büyük keşiflerden biriydi. Bu keşif matematik üzerinde çok önemli etki yaptı, çünkü *bir matematiksel kanıtlamanın geçerliliği konusundaki bir kuşkunun her zaman çözülebileceği* anlamına geliyordu. Buna karşılık, XIX. yüzyılda, matematiğin özüne ilişkin gerçek anlaşmazlıklar vardı. Örneğin, modern küme kuramının babası olan Georg Cantor, bir sonsuz kümenin diğerinden 'daha büyük' olabileceği düşüncesine dayanan argümanları geliştirmiştir. Bu argümanlar günümüzde kabul edilmektedir, fakat zamanında büyük kuşkuya yol açmıştır. Bugün, bir kanıtlamanın doğruluğu konusunda görüş ayrılığı varsa, bu ya kanıtlamanın

yeterince ayrıntılı olarak yazılmış olmamasından ya da onu anlamak ve doğruluğunu dikkatlice incelemek konusunda yeterli çaba harcanmamasından kaynaklanmaktadır.

Aslında, bu, anlaşmazlıkların hiç olmayacağı anlamına gelmez. Örneğin, biri bazı yerleri açık olmayan ve birçok küçük hata içeren, fakat temelde açık biçimde yanlış olmayan çok uzun bir kanıtlama geliştirebilir. Bu türden bir argümanın tartışma götürmez bir şekle getirilip getirilemeyeceğine kesin biçimde karar verilmesi genellikle çok çaba gerektirir ve bu çabanın çok fazla ödülü yoktur. Yazar bile argümanın yanlış olduğunu belirleme riskini göze almaz.

Bununla birlikte, anlaşmazlıkların *ilke olarak* çözülebileceği gerçeği, matematiği eşsiz duruma getirmez. Hâlâ evrenin katı-hal kuramına inanan astronomların ya da derin bir inançla doğal seçimin ne kadar açıklayıcı olduğu konusunda çok farklı görüşleri olan biyologların ya da bilinç ve fiziksel dünya arasındaki ilişki konusunda temel görüş ayrılığına sahip filozofların ya da parasalcılık ve neo-Keynesçilik gibi birbirinin karşıtı düşünce okullarını izleyen ekonomistlerin matematikte eşdeğerleri bulunmamaktadır.

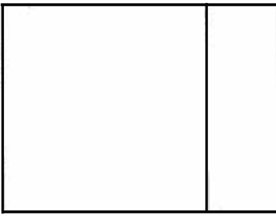
Yukarıdaki 'ilke olarak' deyiminin anlaşılması önemlidir. Hiçbir matematikçi bir kanıtlamayı tam ayrıntılı olarak yazmak, yani yalnızca en açık olan ve kolay biçimde kontrol edilebilen adımları kullanarak temel aksiyomlardan bir tümdengelim olarak yazmak zahmetine bile girmeyecektir. Bu mümkün olsa bile çok gereksiz olacaktır: matematik makaleleri her şeyin adım adım açıklanmasına gerek duymayan iyi eğitimli okuyucular için yazılır. Ancak, birisi önemli bir iddiada bulunursa ya da diğer matematikçiler kanıtlamayı izlemekte güçlükle karşılaşırsa,

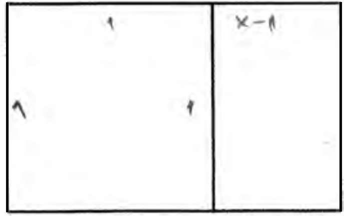
açıklığa kavuşturulmasını talep ederler ve kanıtlamanın adımlarını daha küçük, daha kolay anlaşılır alt adımlara ayırma süreci başlar. Genellikle, dinleyici kitlesi iyi eğitilmiş olduğundan bu sürecin gerekli açıklığa kavuşturma sağlanana ya da bir yanlış ortaya çıkana kadar sürmesine gerek yoktur. Bu yüzden, diğer matematikçilerin özen gösterdiği bir sonucun iddialı bir kanıtlaması eğer doğru *ise* hemen her zaman doğru olarak kabul edilir.

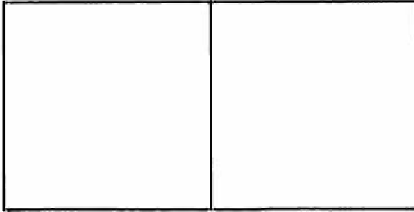
Bazı okuyucuların aklına gelebilecek bir soruyu ele almadım: insan matematikçiler tarafından öneriler aksiyomları niçin kabul etmek durumunda olsun? Eğer, örneğin, birisi matematiksel tümevarım ilkesine itiraz edecek olursa, bu itiraz nasıl karşılanır? Çoğu matematikçi şöyle bir tepki verecektir. Birincisi, bu ilke, bunu anlayan hemen herkese açık biçimde doğru görünecektir. İkincisi, bir aksiyom sistemi için önemli olan, onların tutarlılığından ve yararlılığından çok, aksiyomların doğruluğudur. Bir matematiksel kanıtlamanın aslında yaptığı şey, $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliği gibi belli sonuçların matematiksel tümevarım ilkesi gibi belli öncüllerden elde edilmesidir. Bu öncüllerin doğruluğu, güvenli bir şekilde felsefecilere bırakılabilecek tümüyle ayrı bir konudur.

Altın oranın irrasyonelliği

İleri matematik öğrenen kişilerin yaşadığı bir ortak deneyim, bir kanıtlamanın sonuna geldiğinde şu şekilde düşünmektir: 'Her satırın bir öncekini nasıl izlediğini anladım, ama teoremin *niçin* doğru olduğu konusunda ya da bu







10. Altın oranın varlığı.

argümanı birisinin nasıl düşündüğü konusunda eskisinden daha fazla bilgi sahibi değilim.' Genellikle bir kanıtlamadan, yalnızca doğru olduğunun güvencesinin ötesinde bir şey isteriz. Güzel bir kanıtlamayı okuduktan sonra, teoremin açıkladığını, daha önce anlamadığımız bir şeyi anladığımızı hissederiz.

İnsan beyninin büyük bölümü görsel verilerin işlenmesine ayrıldığından, birçok argümanın görme gücümüzü kullanması şaşırtıcı değildir. Bunu göstermek için, irrasyonelliğin, bu defa altın kural adı verilen bir başka kanıtlamasını vereceğim. Bu, matematikçi olmayanları (ve bir ölçüde de matematikçileri) yüzyıllardır büyüleyen bir sayıdır. Bu, aşağıdaki bir dikdörtgenin kenar uzunluklarının

şu özelliğe sahip oranıdır: buradan bir kareyi kesip çıkardığınızda, geride daha küçük, ilkinin tamı tamına aynı boyuta sahip çevrilmiş bir dikdörtgen kalır. Bu, Şekil 10'daki ikinci dikdörtgen için geçerlidir.

Böyle bir oran niçin var olsun ki? (Matematikçiler bu türden bir soruyu sormak için eğitilmişlerdir.) Bunu görmenin bir yolu bir karenin kenarından büyüyen, böylece karenin daha büyük bir dikdörtgene dönüştüğü küçük bir dikdörtgeni göz önüne getirmektir. Her şeyden önce, daha büyüğü hâlâ hemen hemen bir kareyken küçük dikdörtgen çok uzun ve incedir. Küçük dikdörtgeni kendisi bir kare haline gelene kadar genişletirsek, daha büyük dikdörtgenin uzunluğu genişliğinin iki katına çıkar. Böylece, ilk önce büyük olandan çok daha ince olan küçük dikdörtgen şimdi daha şişkin (büyüklüğüne göre) durumdadır. Arada bir yerde, iki dikdörtgenin aynı biçimde olduğu bir nokta olmalıdır. Şekil 10 bu süreci göstermektedir.

Altın oranın varlığını görmenin ikinci yolu onu hesaplamaktır. Buna x dersek ve kenarlarının uzunluğunun 1 olduğunu varsayarsak, küçük dikdörtgenin kenar uzunlukları x-1 ve 1 iken büyük dikdörtgenin kenar uzunlukları 1 ve x olur. İkisi aynı biçime sahipse, o zaman $x = \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$ olur. Her iki tarafı x-1 ile çarparsak $x(x-1) = 1$ sonucuna varırız ve böylece $x^2 - x - 1 = 0$ olur. Bu ikinci derece denklemi çözerek ve x'in negatif bir sayı olmadığını akılda tutarak $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğunu buluruz. (Matematikte iyi eğitim görmüşseniz ya da son bölümü

unutmadıysanız, $\sqrt{5}$'in var olduğundan nasıl bu kadar emin olduğumu sorabilirsiniz. Aslında, bu ikinci argümanın yaptığı şey, geometrik bir problemi eşdeğer bir cebir problemi haline indirgemektir.)

x oranının mevcut olduğunu ortaya koyduktan sonra, kenar uzunlukları x ve 1 olan bir dikdörtgeni ele alalım ve aşağıdaki süreci düşünelim. Birincisi, bundan bir kare keselim ve geriye, altın oranın tanımına göre orijinal olanla aynı biçime sahip olan daha küçük bir dikdörtgen kalsın. Şimdi bu temel işlemi üst üste tekrarlayın ve her biri öncekiyle aynı biçimde ve bu yüzden de kenar uzunlukları altın orana sahip olan, giderek küçülen dikdörtgen dizisi elde edelim. Açıktır ki, bu süreç hiçbir zaman sona ermeyecektir. (Şekil 11'in birinci dikdörtgenine bakınız.)

Şimdi de bunun aynısını p ve q'nun tam sayılar olduğu, p/q oranındaki kenar uzunluklarına sahip bir dikdörtgene uygulayalım. Bu, dikdörtgenin, kenar uzunlukları p ve q olan bir dikdörtgenle aynı biçime sahip olduğu ve Şekil 11'deki ikinci dikdörtgende görüldüğü gibi p x q adet küçük kareye bölünebileceği anlamına gelir. Bu dikdörtgenin sonundan büyük kareleri çekip alırsak ne olur? Eğer q, p'den daha küçükse, o zaman bir q x q karesini çekip alırız ve geriye q x (p-q) dikdörtgeni kalır. Bundan sonra bir başka kareyi çekip alırız ve bu böyle sürüp gider. Bu süreç sonsuza kadar gider mi? Hayır, çünkü bir kareyi kestiğimiz her defasında küçük karelerin tam sayı adedini çekip almış oluruz ve muhtemelen bunu p x q defadan daha fazla yapamayız, çünkü işe başladığımızda yalnızca p x q adet küçük kare mevcuttu.

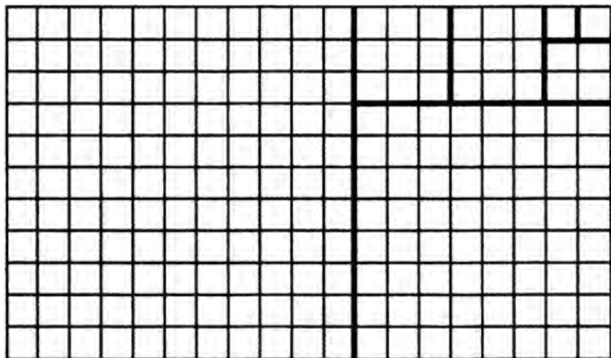
7 etc.

5 6

3 4

1

2



11. Dikdörtgenlerden kareler kesmek.

Aşağıdaki iki olguyu göstermiş olduk.

1. Dikdörtgenin kenarlarının oranı altın oran ise, kareleri kesme işi sonsuza kadar sürdürülebilir.
2. Dikdörtgenin kenarlarının oranı aynı tam sayı çifti için p/q ise, o zaman kareleri kesme işi sonsuza kadar sürdürülemez.

Buradan, p ve q'nun değerleri ne olursa olsun, p/q oranının altın oran olmadığı sonucu çıkar. Diğer bir deyişle, altın oran irrasyoneldir.

Yukarıdaki kanıtlama üzerinde çok fazla düşünürseniz, sonunda ilk başta $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olmasının kanıtlanmasından farklı olmadığını fark edeceksiniz. Bununla birlikte, bunun sunuluş biçimi kesinlikle farklıdır – ve birçok insan için daha çekicidir.

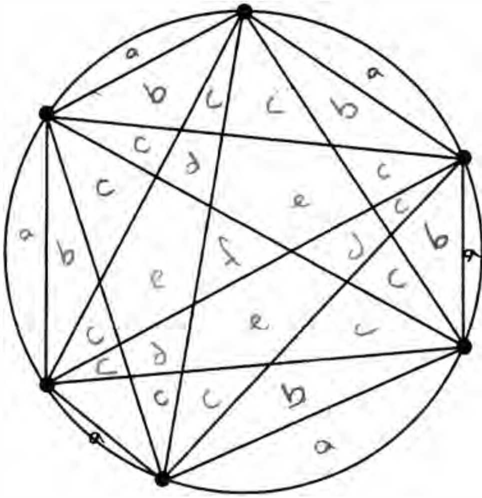
Bir dairenin bölgeleri

Matematiksel kanıtlamanın doğasına ilişkin bir şeyler söyledikten sonra, bölümün başındaki probleme dönelim. Kenarında n adet nokta olan bir dairemiz var, bu noktaların her çiftini doğrularla birleştiriyoruz ve bu doğruların sınırladığı bölge sayısının 2^{n-1} olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer n 1, 2, 3, 4 ya da 5 ise bunun doğru olduğunu daha önce görmüştük. Bu ifadeyi genelde kanıtlamak için kenara yeni bir nokta eklenen her defasında, bölge sayısının iki katına çıkmasına ilişkin olarak ikna edici bir neden bulmayı çok isteriz. Böyle bir neden ne olabilir?

Akla hemen bir neden gelmiyor, o yüzden işe başlamanın bir yolu, bölünmüş dairelerin şeklini incelemek ve genelleme yapılabilecek bir biçimin olup olmadığını görmektir. Örneğin, sınırın etrafındaki üç nokta üç dış bölge ve bir merkezi bölge oluşturmaktadır. Dört nokta söz konusu olduğunda dört dış bölge ve dört iç bölge olmaktadır. Beş nokta, merkezde altıgen ve bundan çıkan beş üçgen, ortaya çıkan yıldıza yarık açan ve onu tekrar bir altıgene dönüştüren beş üçgen ve son olarak beş dış bölge vardır. Bu yüzden, 4'ü 3 + 1, 8'i 4 +4 ve 16'yı 5 +5 +5+1 olarak düşünmek doğaldır.

Bu yardımcı olur mu? Belirgin bir biçimin ortaya çıkması için yeterli örneğe sahip değiliz gibi görünmektedir, bu yüzden sınırın etrafına yerleştirilmiş altı noktadan elde edilen bölgeleri çizmeye çalışalım. Ortaya çıkan sonuç Şekil 12'de görülmektedir. Şimdi altı dış bölge vardır. Bunların her biri içeriye işaret eden üçgen bölgelerin yanındadır. Bu türden iki komşu bölge arasında iki daha küçük üçgen bölge bulunmaktadır. Buraya kadar 6 + 6 + 12 = 24 bölgemiz vardır ve daha merkezi altıgenin içindeki bölgeleri saymamız gerekmektedir. Bunlar üç beşgene, üç dörtgene ve bir merkezi üçgene ayrılmaktadır. Bu nedenle, bölge sayısını 6 + 6 + 12 + 3 + 3 + 1 olarak düşünmek doğaldır.

Ancak bir şeyler yanlış gibi görünmektedir, çünkü bu bize 31 sayısını vermektedir. Acaba bir yanlış mı yaptık? Göründüğü kadarıyla hayır: doğru dizi 1, 2, 4, 8, 16 , 31, 57, 99, 163 olarak başlamaktadır. Aslında, biraz daha düşününce, bölge sayısının her defasında *muhtemelen* iki katına *çıkamayacağı* görülebilir. Başlangıç olarak, sınır etrafında 0 adet nokta olduğunda tanımlanan bölge sayısının,



12. Dairenin bölgeleri.

birinci nokta konulduktan sonra bunun iki katına çıkması durumunda olması gereken ½ değil de 1 olması kaygı vericidir. Bazen sıfır bağlamında bu türden anormallikler olsa da, çoğu matematikçi bu durumu sorunlu görecektir. Bununla birlikte, daha da ciddi olan bir sorun, n oldukça büyük bir sayı ise, 2^{n-1} belirgin biçimde büyüktür. Örneğin, n=20 olduğunda 2^{n-1} sayısı 524.288, n=30 olduğunda 536.870.912'dir Bir dairenin kenarındaki 30 noktanın beş yüz milyondan fazla farklı bölgeyi tanımlaması akla yatkın mıdır? Elbette hayır. Bir alana büyük bir daire çizdiğinizi, düzensiz aralıklarla buna otuz çivi sapladığımızı ve daha sonra bunları çok ince iplerle birleştirdiğinizi düşünün. Ortaya çıkan bölge sayısı kesinlikle çok fazla olacaktır,

fakat düşünülemeyecek kadar da çok olmayacaktır. Eğer daire on metre çapında olsaydı ve beş yüz milyon bölgeye ayrılsaydı, santimetrekare başına ortalama olarak altı yüz bölge olacaktı. Daire iplerden dolayı kalınlaşacak, fakat sınır çevresindeki yalnızca otuz nokta ile bu açık biçimde gerçekleşmeyecektir.

Daha önce söylediğim gibi, matematikçiler 'açıkça' gibi sözcükleri ihtiyatla karşılarlar. Ancak, bu örnekte sezgimiz, aşağıdaki şekilde özetlenebilen somut bir argümanla desteklenebilir. Daire çok fazla sayıda çokgen bölgeye ayrılsaydı, bu bölgelerin aralarında çok fazla sayıda köşe olması gerekirdi. Her köşe iki ip parçasının birbirini kestiği bir noktadır ve bu türden her kesişimle dört çivi, yani ilgili ip parçalarının sona erdiği çiviler ilişkilendirilebilir. Birinci çivi için 30, ikincisi için 29, üçüncüsü için 28 ve dördüncüsü için 27 mümkün alternatif bulunmaktadır. Bu, dört adet çivi seçmeye alternatif sayının 30 x 29 x 28 x 27 = 657720 olduğunu ifade etmektedir. Fakat bu, dört çiviyi farklı sırada seçmemiz durumunda aynı kesişimi belirlemiş olacağımız anlamına gelmektedir. Dört çiviyi sıralamanın 4 x 3 x 2 x 1 = 24 yolu bulunmaktadır ve bunu hesaba kattığımızda kesişim sayısı 657720/24 = 27405'dir ve bu da 536.870.912 bölgenin köşe sayısı olacak kadar büyük değildir. (Aslında 30 noktanın ürettiği gerçek bölge sayısının 27.841 olduğu ortaya çıkmaktadır.)

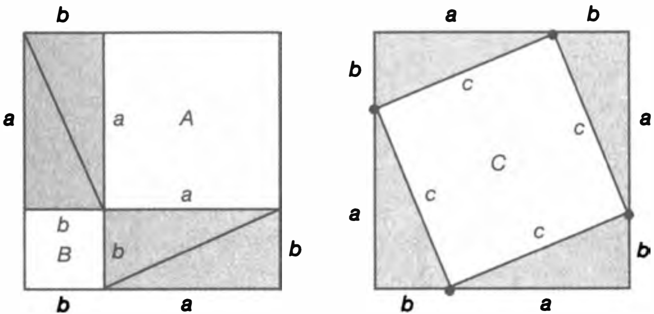
Bu ihtiyatlı hikâye matematiksel ifadelerin doğruluğunun ortaya konulmasına ilişkin birçok önemli ders içermektedir. En belirgin olanı söylediğinizi kanıtlamaya özen göstermezseniz, yanlış bir şey söyleme riskine katlanırsınız. Bundan alınacak daha pozitif bir ders de şudur: ifadeleri

kanıtlamaya çalıştığınızda, bunları tümüyle farklı ve çok daha ilginç şekilde anlarsınız.

Pythagoras teoremi

Pythagoras'ın ünlü teoremi, dik açılı bir üçgenin kenar uzunlukları a, b ve c olduğunda ve hipotenüsün (dik açının karşı kenarı) uzunluğu c olduğunda, $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu ifade eder. Bunun birkaç kanıtlaması vardır, fakat bir tanesi özellikle kısadır ve anlaşılması kolaydır. Aslında, iki diyagramın izlenmesinden başka bir şey gerektirmez.

Şekil 13'te, A, B ve C olarak işaretlediğim karelerin kenar uzunlukları sırasıyla a, b ve c'dir ve bu nedenle alanları a^2, b^2 ve c^2'dir. Dört üçgenin hareket ettirilmesi bunların alanlarını değiştirmeyeceği ve bunların çakışmalarına yol açmayacağı için, kaplamadıkları büyük kare bölümünün



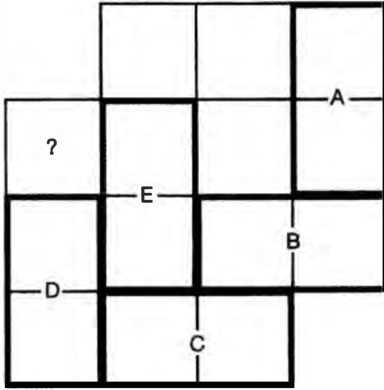
13. Pythagoras teoreminin kısa bir kanıtlaması.

alanı her iki diyagramda da aynıdır. Fakat soldakinde bu alan $a^2 + b^2$ ve sağdakinde c^2'dir.

Köşeleri ortadan kaldırılarak kare bir ızgaranın kaplanması

İyi bilinen ve çözümü zor bir problem şudur. Karelerden oluşan ve sekize sekiz bir ızgarayı alın ve iki karşı köşeden kareleri çekip çıkarın. Izgaranın geri kalanını, her biri iki komşu kareyi tamı tamına kaplayan domino biçimli kiremitlerle kaplayabilir misiniz? Çizdiğim şekil (Şekil 14) sekize sekizlik ızgaranın yerine dörde dörtlük ızgara konulduğunda bunun mümkün olmadığını göstermektedir. A olarak işaretlediğim yere bir kiremit koymak istediğinizi varsayalım. O zaman B, C, D ve E yerlerine kiremitler koymak zorunda kalacağınızı, geriye kaplanmamış bir kare kalacağını görmek kolaydır. Üst sağ köşedeki kare bir şekilde kapatılmak durumunda olduğundan ve bunu yapmanın diğer tek yolu benzer sorunlara yol açacağından (olayın simetrisinden dolayı) şeklin tümünün kaplanması olanaksızdır.

Dört yerine beşi koyduğumuzda, her kiremit iki kare kapladığından ve kaplanması gereken 23 kare –tek sayı– bulunduğundan kiremitle kaplama yine olanaksızdır. Fakat $8^2 - 2 = 62$ çift sayıdır ve bu yüzden bu argümanı sekize sekiz ızgara için kullanamayız. Öte yandan, dörde dört ızgara için yaptığıma benzer bir kanıtlama bulmaya çalıştığınızda, ele almanız gereken alternatifler çok büyük olacağından kısa sürede bu işten vazgeçeceksiniz. Öyleyse,



14. Kenarları çekip çıkarılmış kare bir ızgaranın kiremitlerle kaplanması.

bu probleme nasıl yaklaşılmalıdır? Bu soru ile karşılaşmamışsanız, okumaya devam etmeden önce bunu çözmeye çalışmanızı ya da bir sonraki paragrafa geçmenizi tavsiye ederim, çünkü çözmeyi başarırsanız, matematiğin zevkleri konusunda iyi bir fikir sahibi olursunuz.

Tavsiyeme itibar etmeyenler için, ki deneyimler bunların çoğunluğu oluşturacağını söylemektedir, bir kanıtlamanın neredeyse tamamını oluşturan tek sözcük şudur: satranç. Satranç tahtası, kareleri sırasıyla siyah ve beyaza boyanmış (oyun açısından bu oldukça gereksizdir, fakat görsel açıdan işi kolaylaştırır) sekize sekiz bir ızgaradır. İki karşıt köşenin kareleri aynı renkte olacaktır. Eğer bunlar siyahsa, ki böyle olabilir, satranç tahtasından çıkarılıp alındıklarında, satranç tahtasında 32 beyaz kare ve 30 siyah kare olacaktır. Her domino her renkten yalnızca bir kareyi

kaplar, böylece 30 dominoyu yerleştirdiğinizde, bunu nasıl yapmış olursanız olun, geriye iki beyaz kare kalacaktır ve bunları kapatamazsınız.

Bu kısa argüman, bir kanıtlamanın bir ifadenin doğruluğuna ilişkin bir güvenceden daha fazlasını sunduğunu çok iyi göstermektedir. Örneğin, iki karşıt köşesi çıkarılıp alınmış dörde dört ızgaranın kiremitlerle kaplanamayacağına ilişkin iki kanıtlamaya sahibiz. Bunlardan biri benim yaptığım kanıtlamadır ve diğeri satranç argümanının dörde dört versiyonudur. Her ikisi de istediğimiz şeyi ortaya koymaktadır, fakat bunlardan yalnızca ikincisi kiremitle kaplamanın olanaksızlığına ilişkin *nedene* benzer bir şey söylemektedir. Bu neden hemen bize iki karşıt köşesi çıkarılıp alınmış bine binlik bir ızgaranın kiremitle kaplanmasının da olanaksız olduğunu söyler. Buna karşılık, birinci argüman bize yalnızca dörde dörtlük ızgaraya ilişkin olanı söyler.

İkinci argümanın dikkate değer bir özelliği, tahmin edilemediği halde, anlaşılınca çok doğal görünen tek bir düşünceye dayanmasıdır. Matematikçiler kanıtlamaları tanımlamak için 'zarif', 'güzel' ya da 'akıllıca' gibi sözcükleri kullandıklarında insanlar genellikle şaşırmaktadır, fakat bu türden bir örnek onların neyi anlatmak istediklerini gösterir. Müzik bu konuda yararlı bir benzetme sunmaktadır: bir müzik parçası, sonradan mükemmel bir uyum gibi görünen, beklenmeyen bir armonik yöne doğru ilerlediğinde ya da bir orkestranın dokusu bizim tam olarak anlayamayacağız bir şekilde parçalarının toplamından daha fazla görünürse, bundan büyülenebiliriz. Matematiksel kanıtlamalar ani ifadelerle, tahmin edilememekle birlikte

doğal olan düşüncelerle ve keşfedilecek daha fazla şeyler olduğunu gösteren gizli ipuçlarıyla benzer zevkler sunar. Elbette, matematikteki güzellik müziktekinin aynısı değildir, fakat müzikteki güzellik bir resmin, şiirin ya da insan yüzünün güzelliğinin aynısıdır.

Kanıtlama gerektiren üç belirgin görünümlü ifade

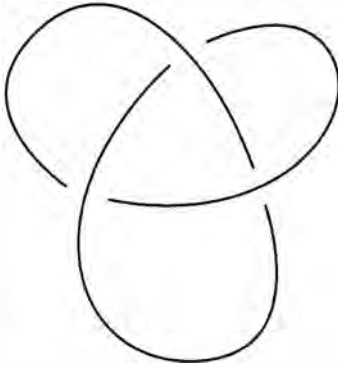
Birçok kişinin anlaşılmaz bulduğu, ileri matematiğin bir özelliği, teoremlerinden bazılarının kanıtlama gerektirmeyecek kadar açık olmasıdır. İnsanlar böyle bir teoremle karşılaştıklarında genellikle şunu sormaktadırlar, 'bu açık olarak kabul edilmeyecekse, başka ne edilecektir'? Eski bir meslektaşımın bu soruya verdiği iyi bir yanıt şöyleydi: eğer akla hemen bir kanıtlama geliyorsa, o ifade açıktır. Bu bölümün geri kalanında açık gibi görünen, fakat bu testten geçemeyen ifadelere üç örnek vereceğim.

1. Aritmetiğin temel teoremi her doğal sayının, yazılış sırası ne olursa olsun, asal sayıların çarpımı olarak yalnızca ve yalnızca bir şekilde yazılabileceğini ifade eder. Örneğin, 36 = 2 x 2 x 3 x 3, 74 = 2 x 37 ve 101'in kendisi bir asal sayıdır (bu bağlamda yalnızca bir asal sayının 'çarpımı' olarak). Böyle birkaç küçük sayıya bakınca, insan bir sayıyı asal sayıların çarpımı olarak ifade etmenin hiçbir zaman iki *farklı* yolunun olamayacağı konusunda hemen ikna olur. Teoremin temel noktası budur ve bu pek kanıtlamaya ihtiyaç göstermez görünmektedir.

Fakat gerçekten de bu kadar açık mıdır? 7, 13, 19, 37 ve 47 gibi sayıların hepsi asal sayılardır, bu nedenle aritmetiğin temel teoremi açık ise, 7 x 13 x 19'un 37 x 47'ye eşit olmaması da açık olmalıdır. Elbette iki sayının aslında farklı olduğu (matematikçilerin söyleyeceği gibi, birinin diğerinden daha ilginç olduğu) kontrol edilebilir, fakat bu, sayıların *belirgin biçimde* farklı olacaklarını göstermez ya da aynı cevabı veren başka iki asal sayının çarpımının niçin bulunamayacağını açıklamaz. Aslında, teoremin kolay bir kanıtlaması mevcut değildir: eğer akla hemen bir kanıtlama gelirse, sizin olağanüstü bir aklınız var demektir.

2. Normal bir ip parçasına bir eğreti düğüm attığımızı ve daha sonra uçları bir araya getirerek matematikçilerin yonca düğümü olarak bildikleri Şekil 15'teki şekli elde ettiğimizi varsayalım. Bu düğümü ipi kesmeden çözmemiz mümkün müdür? Hayır, elbette mümkün değildir.

Ancak neden 'elbette' demek eğilimindeyiz? Aklımıza hemen gelen bir argüman var mıdır? Belki de vardır – ancak düğümü çözmek için yapılacak herhangi bir girişim, kaçınılmaz olarak onu daha az değil, daha karmaşık hale getirecektir. Bununla birlikte, bu içgüdüyü geçerli bir kanıtlama haline dönüştürmek zordur. Gerçekten de açık olan tek şey, düğümü çözmenin hiçbir *basit* yolunun bulunmamasıdır. Bir kenara bırakılması zor olan şey, *önce onu çok daha karmaşık hale getirerek* yonca düğümünü çözmenin bir yolunun olması olasılığıdır. Kabul etmek gerekir ki, bu pek mümkün görünmemektedir, fakat bu türden olgular matematikte ve hatta gündelik yaşamda ortaya çıkar: örneğin, bir odayı iyi bir şekilde derleyip toplamak



15. Bir yonca düğümü.

için, her şeyi karton kutulara yerleştirmek yerine, genellikle odayı çok daha düzensiz hale getirerek işe başlamak gerekir.

3. Düzlemde bir *eğri*, kalemi kağıt üzerinden kaldırmadan çizebileceğiniz her şey anlamına gelir. Kendisini hiç kesmezse *basit*, başladığı yerle sonlanırsa *kapalı eğri* adı verilir. Şekil 16 bu tanımların neyi ifade ettiğini resim olarak göstermektedir. Hem basit hem de kapalı olan birinci eğri, eğrinin *içi* olarak bilinen, düzlemin tek bir bölgesini çevreler. Açıktır ki, basit kapalı her eğri düzlemi iç ve dış olmak üzere iki parçaya böler (eğer eğrinin kendisi de bir bölüm olarak dahil edilirse üç parçaya).

Ancak bu gerçekten bu kadar açık mıdır? Evet, eğer eğri çok karmaşık değilse, kesin olarak böyledir. Fakat Şekil 17'deki eğrinin durumu nedir? Ortaya yakın bir yerde

Basit | Basit değil

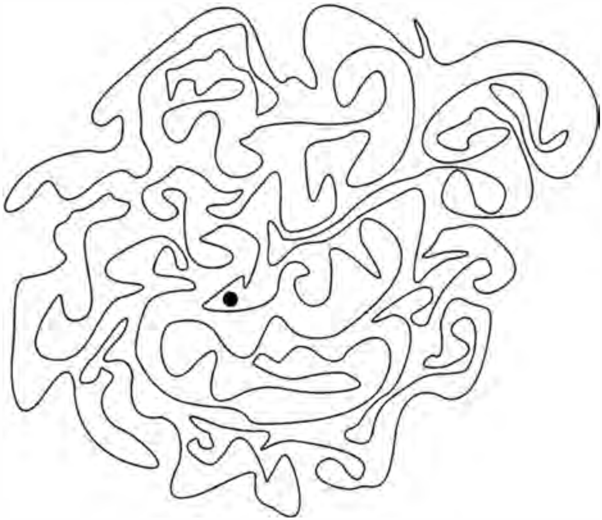
Kapalı

Kapalı değil

16: Dört tür eğri.

bir nokta seçerseniz, bunun eğrinin içinde mi yoksa dışında mı bulunacağı tam olarak açık değildir. Belki de şunu diyebilirsiniz, 9 açık değildir, fakat eğrinin karmaşıklığı bunları görsel olarak ayırt etmeyi zorlaştırsa bile eğrinin içinin ve dışının olacağı kesindir.

Bu görüşün doğruluğunu nasıl gösterebilirsiniz? İçini ve dışını birbirinden şu şekilde ayırt etmeye çalışabilirsiniz. Bir an için iç ve dış kavramlarının anlamlı olduklarını varsayarsak, eğriyi her kestiğimizde içten dışa ya da içten dışa gitmeniz gerekir. Bu yüzden, bir P noktasının içte ya da dışta bulunduğuna karar vermek için yapmanız gereken tek şey, P'den başlayan ve eğrinin açık biçimde dışında olacak kadar uzak bir Q noktasında sonlanan bir



17. Siyah nokta eğrinin içinde mi yoksa dışında mıdır?

doğru çizmektir. Bu doğru eğriyi tek sayı kadar keserse P içindedir, aksi halde dışarıdadır.

Bu argümandaki sorun, çeşitli şeyleri olduğu gibi kabul etmesidir. Örneğin, P'den başlayan ve bir başka nokta olan R'de sonlanan bir başka doğru çizdiğinizde farklı bir yanıt elde etmeyeceğinizi nasıl bilebilirsiniz? (Başka bir yanıt elde etmezsiniz, fakat bunun kanıtlanması gerekir.) Her basit kapalı eğrinin bir iç ve bir dışının olduğu biçimindeki ifade aslında Jordan Eğri Teoremi olarak bilinen ünlü bir matematik teoremidir. Ne kadar açık olursa olsun, bir kanıtlama gerektirir ve bilinen tüm kanıtlamalar bu türden bir kitabın kapsamının çok ötesindedir.

IV. Bölüm

LİMİTLER VE SONSUZ

Son bölümde, bir matematiksel kanıtın, ilke olarak, nasıl biçimsel hale getirilebileceğini göstermeye çalıştım. Belli aksiyomlarla işe başladığımızda, belli kuralları izlediğimizde ve ilginç bir matematiksel ifadeye vardığımızda bu ifade bir teorem olarak kabul edilecektir; aksi halde edilmeyecektir. Giderek daha karmaşık teoremlerin yalnızca birkaç aksiyomdan tümevarımla elde edilmesi düşüncesi, geometrinin büyük bölümünü inşa etmek için yalnızca beş aksiyomu kullanan Eukleides'e kadar uzanmaktadır. (Onun aksiyomları VI. Bölüm'de tartışılmaktadır.) O zaman, insanların bunun matematiğin tümüne uygulanabileceğini kavramaları için niçin XX. yüzyıla kadar beklemenin gerektiği sorulabilir?

Temel neden tek bir sözcükle özetlenebilir: 'sonsuz'. Şu veya bu şekilde, sonsuz kavramı matematik açısından vazgeçilmez niteliktedir ve bununla birlikte bunun kesin hale getirilmesi düşüncesi çok zor bir düşüncedir. Bu bölümde üç ifadeyi tartışacağım. Bunların her biri başlangıçta yeterince masum görünmekte, fakat daha yakından incelendiğinde sonsuzu içerdiği görülmektedir. Bu da güç-

lükler doğurmaktadır ve bu bölümün çoğu bunların nasıl ele alınacağıyla ilgilidir.

1. 2'nin karekökü yaklaşık olarak 1,41421356'dır

Yalnızca küçük bir sayının yaklaşık olarak bir diğer sayıya eşit olduğunu söyleyen yukarıdaki gibi bir ifadede sonsuz nerededir? Bunun yanıtı '2'nin karekökü' ifadesinde yatmaktadır; bu, 2'nin karekökünün *mevcut olduğunu* dolaylı olarak varsaymaktadır. Bu ifadeyi tam olarak anlamak istersek, bu deyim 2'nin karekökünün nasıl bir nesne olduğu sorusunu sormak zorunda bırakır. İşte, sonsuz burada işin içine girer: 2'nin karekökü sonsuz bir ondalıktır.

Bununla yakından ilişkili olan aşağıdaki ifadede sonsuza hiç değinilmediğine dikkat ediniz: 1,41421356'nın karesi 2'ye yakındır. Bu ifade tümüyle sonludur ve yine de yaklaşık olarak aynı şeyi söylemektedir. Daha sonra göreceğimiz gibi, bu önemlidir.

Karesi alındığında 2'yi veren sonsuz bir ondalığın olduğunu söylemek ne demektir? Okulda bize sonsuz ondalıkların değil, sonlu ondalıkların çarpımı öğretilmişti – bir şekilde bunların toplanıp çarpılabilecekleri varsayılmıştı. Fakat bu nasıl yapılacaktır? Ortaya çıkabilecek zorluğu görmek için önce toplamayı ele alalım. Örneğin, 2,3859 ve 3,1405 gibi iki sonlu ondalığı topladığımızda, birini diğerinin altına yazarız ve sağdan başlayarak sayıları karşılıklı olarak toplarız. Son basamaklar olan 9 ve 5'i birlikte toplayarak işe başlarız. Bu bize 14'ü verir, bu nedenle 4'ü

yazarız ve 1'i taşırız. Sonra sondan bir önceki basamaklar olan 5 ve 0'ı ve taşınan 1'i toplarız, 6'yı elde ederiz. Bu şekilde devam ederek yanıt olan 5,5264'e ulaşırız.

Şimdi de diyelim ki iki sonsuz ondalığımız var. Sondan başlayamayız, çünkü sonsuz bir ondalığın son basamağı yoktur. Bu yüzden bunları nasıl toplayabiliriz? Bunun açık bir yanıtı vardır: soldan başlayın. Ancak böyle yapmanın bir sakıncası vardır. Örneğin, 2,3859 ve 3,1405 gibi sonlu ondalıklarla bunu denersek, 2 ve 3'ü toplayarak 5'i elde ederiz. Sonra, ondalık sayının hemen sağında 3 ve 1'i toplayarak 4'ü buluruz ve bu ne yazık ki yanlıştır.

Bu yanlışlık rahatsız edicidir, fakat sinirlerimize hakim olup devam ettiğimiz takdirde bir felaket değildir. Toplanması gereken sonraki iki sayı 8 ve 4'tür ve 2'yi cevabın üçüncü sayısı olarak yazarak ve ikinci sayıyı 4'ten 5'e değiştirerek bunu halledebiliriz. Bu süreç, cevabın dördüncü sayısı olarak 5'i yazmamızla ve daha sonra bunu 6 olarak düzeltmemizle sürer.

Sayı yazıldıktan sonra düzeltmelerin uzun zaman aldığına dikkat ediniz. Örneğin, 1,3555555555555555573 ile 2,5444444444444444452'yi topladığımızda işe 3,89999999999999999'u yazarak başlarız, fakat 7 ve 5'in toplanması olan bir sonraki aşamaya geldiğimizde dokuzlar dizisinin tümünün düzeltilmesi gerekir. Bundan sonra, geriye doğru birer birer gittiğimizde, dokuzlar bir domino sırası gibi sıfırlara dönüşür. Bununla birlikte, bu yöntem çalışır, 3,9000000000000000025 yanıtını vermemizi sağlar ve iki sonsuz ondalığın toplanması düşüncesine bir anlam vermemizi mümkün kılar. Hiçbir sayının birden daha fazla düzeltilmesinin hiç gerekmediğini görmek çok zor değildir,

bu nedenle, iki sonsuz ondalığımız olduğunda, örneğin toplamlarının 53'üncü sayısı yukarıdaki sürecin 53. aşamasında yazdığımız sayı olduğunda ya da sonradan bir düzeltmenin gerekli olması durumunda onun düzeltmesi olacaktır.

Karesi 2 olan sonsuz bir ondalık olduğuna ilişkin iddiamızı anlaşılır hale getirmek istiyoruz. Bunu yapmak için, önce bu sonsuz ondalığın nasıl oluştuğunu görmemiz ve daha sonra da bunun kendisiyle çarpımının ne anlama geldiğini anlamamız gerekmektedir. Tahmin edilebileceği gibi, sonsuz ondalıkların çarpımı toplamadan daha karmaşıktır.

Birincisi, öyle olsa bile ondalık üretmenin bir doğal yolu şöyledir. $1^2 = 1$ olduğundan ve bu da 2'den daha küçük ve $2^2 = 4$ daha büyük olduğundan bu sayı 1 ve 2 arasında olmalıdır. 1, 1^2, 1, 2^2, 1, 3^2 ve böylece 1, 9^2'ne kadar gittiğinizde $1,4^2 = 1,96$ olduğunu görürsünüz ve bu sayı 2'den küçük ve $1,5^2 = 2,25$ daha büyüktür. Bu nedenle $\sqrt{2}$ 1,4 ile 1,5 arasında olmalıdır ve bu yüzden ondalık açılımı 1,4'le başlamalıdır. Şimdi de bu şekilde işlem yaptığınızı ve $\sqrt{2}$'nin ilk sekiz sayısını 1,4142135 olarak bulduğunuzu varsayalım. Bundan sonra, sonraki sayının 6 olduğunu gösteren şu hesaplamaları yapabilirsiniz.

$1,41421350^2 = 1,9999998236822500$
$1,41421351^2 = 1,9999998519665201$
$1,41421352^2 = 1,9999998802507904$
$1,41421353^2 = 1,9999999085350609$
$1,41421354^2 = 1,9999999368193316$
$1,41421355^2 = 1,9999999651036025$
$1,41421356^2 = 1,9999999933878736$
$1,41421357^2 = 2,0000000216721449$

Bu prosedürü tekrarlayarak istediğiniz kadar sayı üretebilirsiniz. Aslında, hiçbir zaman bitiremeseniz bile, en azından ondalıktan sonra, n'nin değeri ne olursa olsun n. sayıyı tanımlamak için belirsiz olmayan bir yola sahipsiniz: bu, karesi 2'den daha küçük olan en büyük ondalığın son rakamıyla aynı olacaktır. Örneğin, karesi ondalıktan sonra iki rakam olan ve 2'den daha küçük en büyük ondalık sayı 1,41'dir, bu nedenle ikinin karekökü 1,41 ile başlamaktadır.

Şimdi de ortaya çıkan sonsuz ondalığa x diyelim. $x^2 = 2$ olduğundan bu kadar emin olmamızı sağlayan şey nedir? Şu şekilde bir argüman yürütebiliriz.

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
1{,}4^2 &= 1{,}96 \\
1{,}41^2 &= 1{,}9881 \\
1{,}414^2 &= 1{,}999396 \\
1{,}4142^2 &= 1{,}99996164 \\
1{,}41421^2 &= 1{,}9999899241 \\
1{,}414213^2 &= 1{,}999998409469 \\
1{,}4142135^2 &= 1{,}99999982368225 \\
1{,}41421356^2 &= 1{,}9999999933878736
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki hesaplama tablosunun gösterdiği gibi, $\sqrt{2}$'nin ondalık açılımında daha fazla sayı kullandıkça, sayıyı kendisi ile çarptığımızda ondalıktan sonra daha fazla dokuz elde ederiz. Bu yüzden, $\sqrt{2}$'nin tam olarak sonsuz açılımını kullanırsak, sonsuz kadar dokuz ve 1,99999999...'un (bir virgül dokuzun tekrarı) 2'ye eşit olduğunu elde etmeliyiz. Bu argüman iki güçlüğe yol açar. Birincisi, bir virgül dokuzun tekrarı niçin ikiye eşit olmaktadır? İkincisi ve daha

ciddi olanı, 'sonsuz açılımını kullanmak' ne demektir? İlk başta anlamaya çalıştığımız şey buydu.

Birinci itirazı ortadan kaldırmak için Platonik içgüdüleri yine bir kenara bırakmalıyız. Bir virgül dokuzun tekrarlayanının ikiye eşit olduğu kabul gören bir matematiksel doğrudur, fakat bu doğru metafizik düşünme süreciyle keşfedilmemiştir. Tersine, bu *kabul edilmiş* bir şeydir. Bununla birlikte, keyfi şekilde kabul edilmiş bir şey değildir, çünkü bunun benimsenmemesi, kişiyi tuhaf yeni nesneler keşfetmek ya da matematiğin alışılmış kurallarından bazılarını terk etmek durumunda bırakır. Örneğin, 1,999999...'un 2'ye eşit olmadığını kabul ederseniz, o zaman 2 – 1,999999... nedir? Bu sıfır ise, x – y = 0 olduğunda x'in y'ye eşit olduğu biçimindeki yararlı kuralı terk etmişsinizdir. Sıfır değilse, alışılmış bir matematiksel açılımı yoktur (aksi halde, bunu ikiden çıkardığınızda bir virgül dokuzun tekrarlayanını değil, daha küçük bir sayıyı elde edersiniz); bu yüzden, 'noktadan sonra sıfır, sonra tekrar sonsuz sayıda sıfır ve *sonra* bir' gibi yeni bir nesne icat etmek zorunda kalırsınız. Bunu yaptığınızda, karşılaştığınız güçlükler yalnızca işin başıdır. Bu gizemli sayıyı kendisi ile çarptığınızda neyi elde edersiniz? Sonsuz sayıda sıfır, sonra tekrar sonsuz sayıda sıfır ve *sonra* bir mi? Bunun yerine on ile çarparsanız ne olur? 'Sonsuz eksi bir' sıfırı izleyen biri mi elde edersiniz? 1/3'ün ondalık açılımı nedir? Şimdi de bu sayıyı 3 ile çarpın. Cevap 1 midir yoksa 0,999999... mudur? Genelde kabul edilmiş olanı izlerseniz, bu türden zor sorular ortaya çıkmaz. (Zor fakat olanaksız değil: tutarlı bir 'çok küçük' sayılar kavramı Abraham Robinson tarafından 1960'larda keşfedilmiştir, fakat onun standart-

olmayan analiz olarak adlandırılan teorisi matematiksel anaakımın parçası haline gelmemiştir.)

Ikinci güçlük daha gerçek bir güçlüktür, fakat bunun üstesinden gelinebilir. Sonsuz ondalıklara uzun çarpım prosedürleri uygulandığında gerçekte ne olduğunu tahayyül etmek yerine, $x^2 = 2$ ifadesi, basit biçimde, gözlemlediğimiz gibi, x ne kadar fazla sayı alırsa, ortaya çıkan sayının karesinin 2'ye yaklaşması anlamına gelecektir biçiminde yorumlanabilir. Daha kesin olmak gerekirse, karesi alındığında 1,9999... ile başlayan bir sayı üretmekte ısrarlı olduğunuzu varsayalım. x'in ilk birkaç sayısının verdiği 1,41421 sayısını önereceğim. 1,41421 1,41422'ye çok yakın olduğundan, bunların karelerinin de birbirine çok yakın olmasını beklerim (bu oldukça kolay bir şekilde kanıtlanabilir). Fakat x'i seçme nedenimize bağlı olarak, $1,41421^2$ sayısı 2'den daha küçük ve $1,41422^2$ sayısı 2'den büyüktür. Buradan her iki sayının da 2'ye çok yakın olduğu sonucu çıkar. Bunu kontrol edelim: $1,41421^2 = 1,9999899241$, böylece istemiş olduğunuz özelliğe sahip bir sayı bulmuş oldum. Karesi alındığında aşağıdaki sayıyla başlayan bir sayı isterseniz,

1,99999999999999999999999999999999999999999999999...

x'in birkaç sayı daha fazlası olan tamı tamına aynı argümanı kullanabilirim (n adet dokuz isterseniz, ondalığı izleyen n+1 sayı her zaman yeterli olacaktır). Kaç dokuz isterseniz isteyin, bunu yapabilmem, sonsuz ondalığa sahip x'in kendisi ile çarpıldığında 2'ye eşit olduğunu söylemenin ne anlama geldiğini ortaya koymaktadır.

Yaptığımız şeyin, sonsuzluğu içeren bir ifadenin bunu içermeyen daha biçimsiz bir ifadenin renkli bir biçimi ola-

rak yorumlanması olduğuna dikkat ediniz. Daha titiz sonsuz ifade, 'x, karesi 2 olan sonsuz bir ondalıktır' biçimindedir. Bunun çevirisi, "herhangi bir n için x'in n. sayısını belirleyen kesin bir kural bulunmaktadır; bu istediğiniz kadar uzun sonlu ondalıklar oluşturmamıza olanak sağlar ve bunların karesi, bunu yeterince uzun seçerek 2'ye istediğiniz kadar yaklaştırılabilir" biçimindedir.

$x^2 = 2$ gibi görünüşte basit bir ifadenin anlamının aslında çok karmaşık olduğunu mu söylüyorum? Bir şekilde evet, bunu söylüyorum – bu ifade aslında gizli karmaşıklıkları içermektedir; fakat daha önemli bir açıdan bunu söylemiyorum. Sonsuzdan söz etmeden, sonsuz ondalıkların toplama ve çıkarma işlemlerinin tanımlanması zor iştir, fakat ortaya çıkan karmaşık tanımların, II. Bölüm'de ortaya konulan, değişme ve birleşme özellikleri gibi özelliklere uyduğu da incelenmelidir. Bununla birlikte, bu yapıldığında, tekrar soyut biçimde düşünme özgürlüğüne kavuşuruz. x'e ilişkin sorun, bunun karesinin iki olmasıdır. 'Karesi alındığında' ifadesine ilişkin sorun, bunun anlamının uygun kurallara uyan *birkaç* çarpma tanımına dayalı olmasıdır. Aslında, önemli olan, x'in trilyonuncu sayısının ne olduğu ve çarpma tanımının bir ölçüde karmaşık olması değildir.

2. Tam o elektrik direğini geçerken saatte 65 km. hıza ulaştık.

Bir otomobile gaz verdiğinizi ve kilometre saatinin 50 km.'den 80 km.'ye çıktığını düşünelim. Otomobilin bir an için saatte 65 km. hızla gittiğini –kilometre saatinin ko-

lunun tam olarak 40'ı geçtiği an– söylemek çekici gelir. Bu andan önce otomobil daha yavaştı ve bundan sonra daha hızlıydı. Ancak otomobilin hızının bir an için 65 km. olduğunu söylemek ne anlama gelir? Otomobil hızlanmıyorsa, saatte kaç kilometre hızla gittiğini ölçebiliriz ve bu da otomobilin hızını verir. (Alternatif ve daha pratik olarak, 30 saniye içinde ne kadar yol aldığını görür ve bunu 120 ile çarparız.) Ancak, açıktır ki, bu yöntem hızlanan bir otomobil için uygulanamaz: belli bir süre içinde ne kadar yol aldığını ölçtüğümüzde, bu süre içindeki ortalama hızını hesaplamış oluruz ve bu da belli bir andaki hızını bize söylemez.

Otomobilin *sonsuz kadar küçük* bir zaman diliminde ne kadar yol aldığını ölçebilseydik bu sorun ortadan kalkacaktı, çünkü o zaman hız, değişecek zamanı bulamayacaktı. Eğer geçen süre t saat ise, burada t sonsuz kadar küçük bir sayıdır, otomobilin bu t saatte ne kadar kilometre kat ettiğini ölçüp elbette sonsuz kadar küçük olan bu sayıya s der ve bunu t'ye bölerek otomobilin anlık hızını elde edebilirdik.

Bu saçma fantezi bir virgül dokuzun tekrarlayanının ikiye eşit olmayabileceği düşüncesini kısaca ele aldığımızda karşılaştığımız sorunlara çok benzer sorunlara yol açar. t sıfır mıdır? Eğer öyleyse, s'nin de öyle olmasının gerektiği çok açıktır (bir otomobil belli bir uzaklığı sıfır zamanda alamaz). Ancak sıfır sıfıra bölünemez ve belirsiz bir yanıt elde edilemez. Öte yandan, eğer t sıfır değilse, o zaman otomobil bu t saatte hızlanır ve ölçüm geçersiz olur.

Anlık hızı anlamanın yolu, t çok küçük olduğunda –örneğin saniyenin yüzde biri gibi– otomobilin *çok fazla*

hızlanmak için zamanının olmayacağı gerçeğinden yararlanmaktır. Bir an için hızı tam olarak hesaplamaya çalışmadığımızı, fakat buna iyice yakın bir değeri belirlemeye çalıştığımızı düşünelim. Eğer ölçüm donanımımız doğru ölçümler yapıyorsa, otomobilin saniyenin yüzde birinde ne kadar yol aldığını görebilir ve bu uzaklığı bir saatteki saniyenin yüzde biri sayısıyla, yani 360.000 ile çarpabiliriz. Sonuç çok doğru olmayacaktır, fakat otomobil saniyenin yüzde birinde çok fazla hızlanamayacağı için bize yakın bir değer verecektir.

Bu durum $1,4142135^2$'nin 2'ye yakın bir değer olmasını hatırlatmakta ve çok benzer şekilde sonsuz konusunda ya da sonsuz derecede küçük konusunda kaygı duymamamızı sağlamaktadır. Otomobilin saniyenin yüzde birinde ne kadar yol aldığını ölçmek yerine, saniyenin milyonda birinde aldığı yolu ölçtüğümüzü varsayalım. Otomobil bu süre içinde daha da az hızlanacaktır, bu yüzden de yanıtımız daha da kesin olacaktır. Bu gözlem, 'Otomobil ŞİMDİ saatte 65 km. hızla gidiyor' ifadesini şu şekilde daha karmaşık sonlu bir ifadeye dönüştürmenin yolunu sağlar: 'Yapabileceğim hatanın sınırını belirlersen, t küçük olduğu sürece (genellikle 1'den çok daha küçük bir değerdir), otomobilin t saatte kaç kilometre kat ettiğini görebilirim, bunu t'ye bölerek, en azından bana tanıdığın hata payı ölçüsünde 65 kilometreye yakın olacak bir sonucu elde edebilirim.' Örneğin, t yeterince küçükse, hesaplamamın 39,99 ile 40,01 arasında olacağını garanti edebilirim. Benden 0,0001 ölçüsünde kesin bir sonuç isterseniz, t'yi daha küçültmem gerekebilir, fakat yeterince küçük olduğu sürece size istediğiniz kesinliği verebilirim.

Bir kez daha, yaklaşık sonuçlarla ilgili daha karmaşık bir ifadeyi dile getirmenin uygun bir yolu olarak sonsuzu içeren bir ifadeyi ele alıyoruz. Daha anlamlı olabilecek bir başka sözcük 'limit'tir. Sonsuz bir ondalık, sonlu ondalıkların hesaplamalarının limitidir ve anlık hız, giderek kısa zaman dilimlerinde alınan yol ölçülerek yapılan hesapların limitidir. Matematikçiler genellikle 'limitte' ya da 'sonsuzda' ne olduğundan söz ederler, fakat bunu yaparken tümüyle ciddi olmadıklarının farkındadırlar. Bununla tam olarak neyi anlattıklarına ilişkin olarak onları zorlarsanız, bunun yerine yaklaşık değerler hakkında konuşmaya başlayacaklardır.

3. Yarıçapı r olan bir dairenin alanı πr^2'dir

Sonsuzun sonlu açısından anlaşılabileceğinin kavranması, kökleri çok daha önceye dayanmakla birlikte, XIX. yüzyıl matematiğinin en önemli başarılarından biridir. Bir dairenin alanının nasıl hesaplanabileceğine ilişkin bir sonraki örneğimi tartışırken Arkhimedes tarafından İÖ III. yüzyılda keşfedilen bir argümanı kullanacağım. Ancak bu hesaplamayı yapmadan önce neyi hesapladığımız hakkında bir karara varmamız gerekmektedir ve bu düşünüldüğü kadar kolay bir şey değildir. Alan nedir? Elbette, şekil içinde olan bir şeyin (yani iki boyutlu bir şey) miktarı gibi bir şeydir, fakat bunu nasıl daha açık biçime sokabiliriz?

Alan ne olursa olsun, belli biçimler için hesaplaması kolay görünmektedir. Örneğin, bir dikdörtgenin kenar uzunlukları a ve b ise, alanı ab'dir. Her dik açılı üçgen bir

dikdörtgenin çaprazından ikiye kesilmesinin sonucu olarak düşünülebilir, böylece alanı söz konusu dikdörtgenin yarısıdır. Her üçgen iki dik açılı üçgen biçiminde kesilebilir ve poligon üçgenlere ayrılabilir. Bu nedenle, bir poligonun alanının hesaplanması çok zor değildir. Hesapladığımız şeyin tam olarak nasıl olduğu konusunda kaygı duymak yerine, yalnızca poligonun alanını yaptığımız hesaplamanın sonucu olarak *tanımlayabiliriz* (kendimizi bir kez poligonun iki farklı şekilde üçgenlere parçalanabileceğine ikna etmemiz, bize iki farklı sonuç sağlamayacaktır).

Sorunlarımız sınırları eğri olan şekillere bakmaya başladığımızda ortaya çıkar. Bir daireyi birkaç üçgene bölmek mümkün değildir. O zaman dairenin alanı πr^2'dir dediğimizde neyi ifade ediyoruz?

Bu, soyut yaklaşımın çok yararlı olduğu yerlere bir başka örnektir. Alanın ne *olduğu* üzerinde değil de, ne *yaptığı* üzerinde duralım. Alan bu kadar şeyi yapamaz göründüğü için bu önerinin açıklığa kavuşturulması gerekmektedir – elbette orada durmaktadır. Anlatmak istediğim şey, makul bir alan kavramının sahip olacağı özellikler üzerinde durmaktır. Aşağıda beş tane özellik verilmiştir.

Ar1 Bir biçimi kaydırdığınızda alanı değişmez. (Ya da daha biçimsel olarak: iki benzer şekil aynı alana sahiptir.)

Ar2 Bir şekil bir diğerinin içindeyse, birincinin alanı ikincisinin alanından daha büyük değildir.

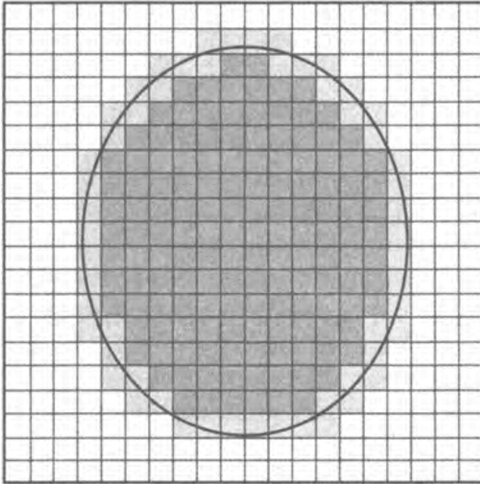
Ar3 Dikdörtgenin alanı, iki kenarının çarpımıyla elde edilir.

Ar4 Bir şekli birkaç parçaya ayırırsanız, parçaların alanı ilk şeklin alanlarının toplamıdır.

Ar5 Bir şekli her yöne doğru 2 faktörü ile genişletirseniz, alanı 4 katına çıkar.

Yukarıda ele aldıklarımıza bakarsanız, dik açılı üçgenin alanının hesaplanmasında **Ar1**, **Ar3** ve **Ar4** özelliklerini kullandığımızı görürsünüz. **Ar2** özelliği sözü edilmeye pek değer olmayacak kadar açık görünebilir, fakat aksiyomlardan beklenen budur ve daha sonra göreceğimiz gibi çok yararlıdır. **Ar5** özelliği, önemli olmakla birlikte, diğerlerinden çıkarım yoluyla elde edilebileceği için aslında bir aksiyom olarak gerekli değildir.

Bu özellikleri bir dairenin alanını anlatırken nasıl kullanabiliriz? Bu bölümün buraya kadarki mesajı, bir defada



18. Eğri şeklin alanının yaklaşık olarak hesaplanması.

bunu tanımlamak yerine, alanı *yaklaşık olarak* elde etmek konusunda düşünmenin yararlı olduğu biçiminde olabilir. Bu oldukça kolay bir şekilde şöyle yapılabilir. Çok küçük kareleri olan bir grafik kağıdı üzerine bir şeklin çizildiğini düşünün. **Ar3** özelliği yoluyla bu karelerin alanlarını biliyoruz (kare özel bir tür dikdörtgen olduğundan dolayı), bu nedenle şeklin alanını, kaç tane kare içerdiğini sayarak hesaplayabiliriz. Örneğin, şekil 144 kare içeriyorsa, şeklin alanı en azından her karenin alanının 144 ile çarpımıdır. Burada, aslında 144 kareden oluşan bir şeklin alanını hesapladığımıza dikkat ediniz ve bu da **Ar3** ve **Ar4** özellikleri yoluyla kolayca belirlenebilir.

Şekil 18'de gösterilen şey doğru cevabı vermemektedir, çünkü kısmen şeklin içinde ve kısmen şeklin dışında yer alan bazı kareler bulunmaktadır, bu yüzden alanın tümünü hesaba katmamış olduk. Bununla birlikte, bu hesaplamayı iyileştirmenin açık bir yolu mevcuttur ve buna göre her kare daha küçük dört kareye bölünerek diğer kareler yerine bunlar kullanılabilir. Daha önce olduğu gibi, bu karelerden bazıları içeride, bazıları dışarıda olacaktır, fakat şimdi tümüyle içeride olan karelerin biraz daha çoğunu işe dahil etmiş olacağız. Genelde, karelerin ızgaraları ne kadar küçük olursa, hesaplamamızda orijinal şeklin daha fazlasını dikkate alırız. Giderek daha küçük karelerle birlikte daha küçük ızgaraları aldıkça hesaplamalarımızın sonucunun, tıpkı $\sqrt{2}$'ye giderek daha yakın değerlerin karelerinin 2'ye giderek daha da yaklaşması gibi, belli bir sayıya giderek daha yaklaştığını görürüz (bu göründüğü kadar açık değildir) ve bu sayıyı şeklin alanı olarak *tanımlarız.*

Böylece, matematiksel olarak düşünme eğilimi olan biri açısından, bir şeklin alanının bir metrekare olduğu biçimindeki ifade şunu anlatır. Belli bir hata payı tolere edilebilir sayıldığında, ne kadar küçük olursa olsun yeterince küçük kare ızgarası seçilebilir, şeklin içinde yer alan karelerin alanları toplanarak yaklaşık bir hesaplama yapılabilir ve bir metrekareden bu miktardan daha az farklı bir sonuca ulaşılabilir. (İnsanın kafasının bir yerinde, iyice bastırılmış şekilde, 'limitte' sonsuz kadar çok küçük karelerin kullanılabileceği ve tam doğru sonucun elde edilebileceği düşüncesi yatabilir.)

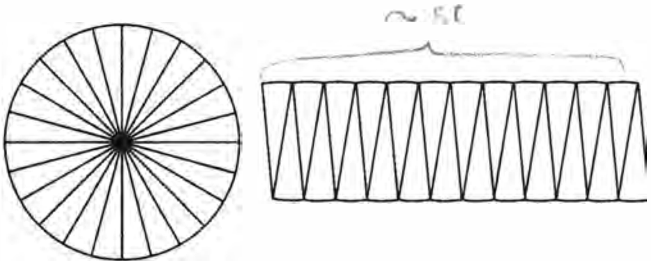
Bunu belki de daha açık biçimde ifade etmenin bir diğer yolu şudur. Bir eğri şekil tamı tamına 12 santimetrekare bir alana sahipse ve bunu kare ızgaralarını kullanarak göstermem gerekiyorsa, o zaman yapacağım iş olanaksız hale gelir – bunlardan sonsuz sayıdakine ihtiyacım vardır. Fakat, örneğin 11,9 gibi 12'den *farklı* bir sayı verirseniz, şeklin alanının bu sayı *olmadığını* kesin olarak kanıtlamak için karelerden oluşan ızgarayı kullanabilirim: yapmam gereken tek şey, dışarıda kalacak alanın 0,1 santimetrekareden daha az olmasını sağlayacak kadar küçük bir ızgaranın seçilmesidir. Diğer bir deyişle, alanın 12 olduğunu kanıtlamak yerine bundan başka bir şey olmadığını kanıtlamaya razı olurum. Şeklin alanı, yanlış olduğunu kanıtlayamadığım sayıdır.

Bu düşünceler alanın tatmin edici bir tanımını verir, fakat yine de bizi bir sorunla karşı karşıya bırakır. Yarıçapı r olan bir dairenin alanını hesaplamada yukarıdaki prosedürü kullanırsak hesaplamalarımızın πr^2'ye giderek daha yaklaşacağını nasıl gösterebiliriz? Çoğu şekil için bu soru-

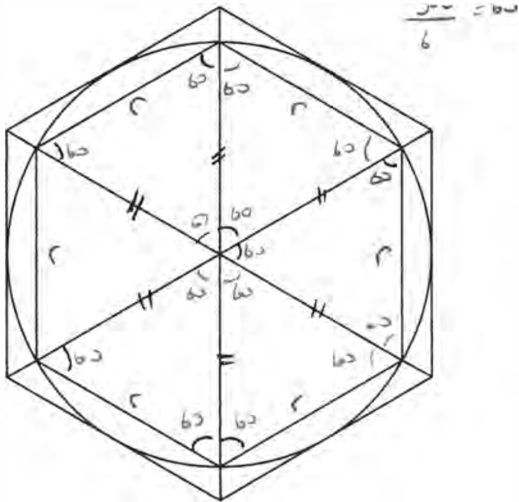
nun yanıtı, bu kitapta tartışmadığım integral kalkülüsünün kullanılmasıdır, fakat daire için daha önce değindiğim Arkhimedes'in usta işi argümanı kullanılabilir.

Şekil 19 dilimlere ayrılmış ve bu dilimler ayrılarak ve yeniden bir araya getirilerek oluşturulmuş yaklaşık bir dikdörtgeni göstermektedir. Dilimler ince olduğundan, yaklaşık dikdörtgenin yüksekliği yaklaşık olarak dairenin yarıçapı olan r'dir. Yine dilimler ince olduğundan, yaklaşık dikdörtgenin üst ve yan kenarları yaklaşık olarak doğrulardan oluşur. Bu kenarların her biri dairenin çevresinin yarısını kullandığından ve π'nin tanımı yoluyla çevresinin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan, bunların uzunlukları yaklaşık olarak πr'dir. Bu yüzden, dikdörtgenin alanı en azından yaklaşık olarak $r \times \pi r = \pi r^2$'dir.

Elbette, tüm yaptığımız bir daireyi kesmek ve parçaları hareket ettirmek olduğundan bu tamı tamına πr^2'dir, fakat bunu henüz bilmiyoruz. Buraya kadarki argüman sizi ikna etmiş olabilir, fakat dilimler giderek büyüdükçe yukarıdaki yaklaşık sonucun πr^2'ye giderek yaklaşacağını kanıtlama-



19. Dairenin alanının πr^2 olduğunun gösterilmesinde Arkhimedes'in yöntemi.



20. Dairenin bir çokgene yaklaştırılması.

mız gerektiği için tümüyle sona ermemiştir. Çok kısa olarak, bunu yapmanın bir yolu, biri dairenin içinde, diğeri onu kaplayan iki düzgün çokgen almaktır.

Şekil 20 bunu altıgenlerle göstermektedir. İçerideki çokgenin çevre uzunluğu, dairenin çevresinden daha kısadır, öte yandan dış çokgenin çevre uzunluğu dairenin çevresinden daha uzundur. İki çokgenin her biri üçgen dilimlere ayrılabilir ve paralelkenarlar biçiminde yeniden bir araya getirilebilir. Basit bir hesaplama, daha küçük olan paralelkenarın, iç çokgenin çevre uzunluğunun yarısının r katından daha küçük ve bu yüzden de πr^2'den daha küçük bir alana sahip olduğunu gösterir. Benzer şekilde, daha büyük olan çokgenin alanı πr^2'den daha büyüktür. Bunun-

la birlikte, dilim sayısı yeterince çok olursa, iki çokgenin alanları arasındaki fark istenildiği kadar küçük hale getirilebilir. Daire her zaman daha küçük olanı içerdiğinden ve daha büyük olan tarafından içerildiğinden alanının tamı tamına πr^2 olması gerekir.

V. Bölüm

BOYUT

İleri matematiğin dikkate değer bir özelliği, büyük bölümünün üç boyuttan daha fazlasını içeren geometriyle ilgili olmasıdır. Bu olgu matematikçi olmayanları şaşırtmaktadır: doğrular ve eğriler tek boyutludur, yüzeyler iki boyutludur ve somut nesneler üç boyutludur, fakat bir şey nasıl dört boyutlu olabilir? Bir nesnenin yüksekliği, genişliği ve derinliği varsa, bu nesne uzayın bir bölümünü doldurur ve daha fazla boyuta gerek kalmaz gibi görünmektedir. Bazen dördüncü boyutun zaman olduğu öne sürülür ve bu da örneğin özel görelilik gibi bazı durumlarda iyi bir yanıttır, fakat her ikisi de matematiksel açıdan önemli olan, diyelim yirmi altı boyutlu ya da sonsuz boyutlu geometriyi anlamamızda yardımcı olmaz.

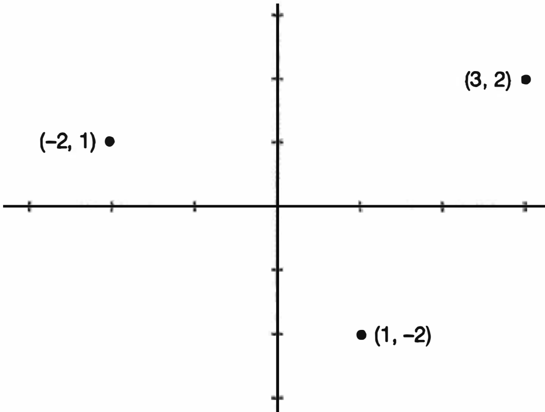
Çok boyutlu geometri de en iyi biçimde soyut bakış açısıyla anlaşılabilecek kavrama bir diğer örnektir. Bunun *varlığı* konusunda ya da yirmi altı boyutlu uzaya ilişkin olarak kaygı duymak yerine, onun *özellikleri* ko-

nusunda düşünelim. Önce, bir şeyin var olduğu belirlenmeden onun özelliklerinin ele alınmasının nasıl mümkün olabileceğine şaşırabilirsiniz, fakat bu kaygı kolaylıkla giderilebilir. 'Bir şey' sözcüklerini bir kenara bırakırsanız, soru şu şekli alır: bir şeyin bu özelliklere *sahip olduğu* önce belirlenmeden bu özellikler kümesi nasıl ele alınabilir? Ancak bu hiç de zor bir şey değildir. Örneğin, böyle bir şeyin olacağının güvencesi hiç olmasa da, ABD'nin kadın başkanının sahip olabileceği özellikler konusunda spekülasyon yapılabilir.

Yirmi altı boyutlu uzaydan ne tür özellikler bekleyebiliriz? En belirgin olanı, onu yirmi altı boyutlu yapan özellik, yani tıpkı iki boyutta iki sayının ve üç boyutta üç sayının gerekli olması gibi bir noktayı belirtmek için yirmi altı sayının gerekli olmasıdır. Bir diğeri, yirmi altı boyutlu bir biçimi alırsanız ve onu her yöne iki faktörüyle genişletirseniz, bunun anlamlı olduğunu varsaydığımızda onun 'hacminin' 2^{96} ile çarpılması gerekir. Bu böyle sürer gider.

Yirmi altı boyutlu uzay düşüncesine ilişkin mantıksal bir tutarsızlık olduğu ortaya çıkarsa, bu tür spekülasyonlar çok ilginç olmayacaktır. Kendimizi bu konuda rahatlatmak için, her şeyden önce onun mevcut olduğunu –fiziksel anlamda değil de matematiksel anlamda– göstermek isteriz – bir tutarsızlık içerirse elbette var olmayacaktır. Bunun anlamı, uygun bir modeli tanımlamamızın gerekli olmasıdır. Bunun herhangi bir şeyin modeli olması gerekmeyebilir, fakat beklediğimiz tüm özelliklere sahip olursa, bu özelliklerin tutarlı olduğunu gösterecektir. Genellikle olduğu gibi, tanımlayacağımız model çok yararlı olacaktır.

Bir düşünceniz olduğunda modelin tanımlanması şaşırtıcı derecede kolaydır: Koordinatlar. Daha önce söylemiş olduğum gibi, iki boyutlu bir nokta iki sayı kullanılarak belirtilebilir, öte yandan üç boyutta üç sayıya ihtiyaç vardır. Bunu yapmanın alışılmış yolu, Descartes tarafından icat edildiği için (bu düşüncenin ona rüyasında geldiğini öne sürmüştür) bu şekilde adlandırılan kartezyen koordinatları kullanmaktır. İki boyutta birbirine dik açılı iki yönle işe başlarsınız. Örneğin, Şekil 21'de gösterildiği gibi, bunlardan biri sağa, diğeri yukarı dönük olabilir. Düzlemde herhangi bir nokta alındığında, belli bir mesafe yatay giderek (sola doğru giderseniz sağa negatif bir mesafe gitmiş gibi kabul edebilirsiniz), daha sonra doksan derece dönüp belli

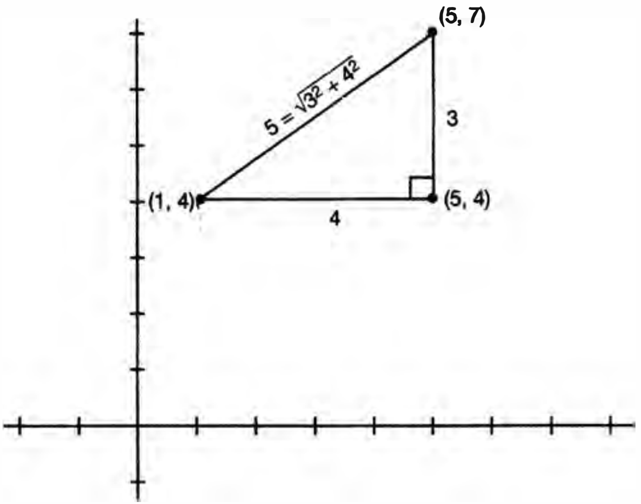


21. Kartezyen düzlemde üç nokta.

bir mesafe dikey olarak giderek o noktaya ulaşabilirsiniz. Bu iki mesafe size iki sayı verir ve bu sayılar ulaştığınız noktanın koordinatlarıdır. Şekil 21 koordinatları (3, 2) (sağa bir ve yukarı iki), (-2, 1) (sola iki ve yukarı bir) ve (1, -2) (sağa bir ve aşağı iki) olan noktaları göstermektedir. Üç boyutta, yani uzayda da ileri, sağa ve yukarı gibi üç yön kullanma gereği dışında tamı tamına aynı prosedür işler.

Şimdi de bakış açımızda çok küçük bir değişikliğe gidelim. Bu iki (ya da üç) sayıyı uzaydaki bir noktanın *koordinatları* olarak adlandırmak yerine, sayıların nokta *olduğunu* varsayalım. Diğer bir deyişle, 'koordinatları (5, 3) olan nokta' yerine, '(5, 3) noktası' diyelim. Bunun yalnızca bir dilsel kolaylık olduğu düşünülebilir, fakat aslında bundan daha fazlasını içermektedir. Aslında, fiziksel bir uzay yerine, uzayın matematiksel bir modelini koymaktadır. İki boyutlu uzaya ilişkin matematiksel modelimiz (a, b) gerçek sayı çiftlerinden oluşur. Bu sayı çiftleri uzayda noktalar olmamakla birlikte, kendimize bunların temsil ettiği şeyin bu olduğunu hatırlatmak için bunları noktalar olarak adlandırıyoruz. Benzer şekilde, tüm (a, b, c) üçlü sayılarını alarak ve yine bunları noktalar olarak adlandırarak üç boyutlu uzay modelini elde edebiliriz. Örneğin, sekiz boyutlu uzayda noktaları tanımlamanın açık bir yolu mevcuttur. Bunlar gerçek sayıların sekizlilerinden başka bir şey değildir. Örneğin, iki nokta şöyledir: (1, 3, -1, 4, 0, 0, 6, 7) ve $(5, \pi, -3/2, \sqrt{2}, 17, 89, 93, -12, \sqrt{2}+1)$.

Çeşitli matematiksel modelleri tanımlamış oldum, fakat 'uzay' sözcüğü henüz model açısından tanımlamadığım birçok geometrik kavramı beraberinde taşıdığı için sekiz boyutlu *uzay* modeli olarak adlandırılmaya henüz uygun



22. Pythagoras teoremini kullanarak mesafelerin hesaplanması.

değildir: bir uzaydan daha çok, tek tek noktaların büyük bir bileşimine benzemektedir. Örneğin, nokta çiftleri arasındaki uzaklıktan ve doğrulardan, dairelerden ve diğer geometrik şekillerden söz ederiz. Bu düşüncelerin yüksek boyutlardaki karşılıkları nelerdir?

Bu tür soruları yanıtlamanın genel bir yöntemi mevcuttur. İki ya da üç boyutlu tanıdık bir kavram verildiğinde, önce bu tümüyle koordinatlar açısından tanımlanır ve daha sonra daha yüksek boyutlara genelleştirmenin açık olacağı umut edilir. Bunun uzaklık kavramı için nasıl işlediğini görelim.

Düzlemde (1, 4) ve (5, 7) gibi iki nokta verildiğinde aralarındaki uzaklığı şöyle hesaplayabiliriz. Önce, Şekil

22'de gösterildiği gibi, (5, 4) ek bir noktası olan bir dik açı oluşturarak başlarız. Sonra (1, 4) ve (5, 7) noktalarını birleştiren doğrunun bu üçgenin hipotenüsü olduğunu, yani uzunluğunun Pythagoras teoremi kullanılarak hesaplanabileceğini fark ederiz. Diğer iki kenarın uzunlukları 5 – 1= 4 ve 7 – 4 = 3'tür, bu yüzden hipotenüsün uzunluğu $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$'tir. Böylece, iki nokta arasındaki uzaklık 5'tir. Bu yöntemi (a, b) ve (c, d) genel nokta çiftlerine uyguladığımızda, bu iki noktası hipotenüsün iki ucundan birinde olan ve diğer iki kenar uzunlukları |c - a| (bunun anlamı c ve a'nın farkıdır) ve |d - b| olan dik açılı bir üçgen elde ederiz. Pythagoras r teoremi bize iki nokta arasındaki uzaklığın şu formülle hesaplanabileceğini söyler:

$$\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Buna benzer fakat biraz daha karmaşık bir argüman üç boyutta işler ve (a, b, c) ve (d, e, f) noktaları arasındaki uzaklığın şöyle olduğunu gösterir:

$$\sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}$$

Diğer bir deyişle, iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamak için karşılıklı koordinatlar arasındaki farkların karesini toplarsınız ve sonra karekökünü alırsınız. Özet olarak, bunun nedeni şudur. Köşeleri (a, b, c), ve (d, e, f) olan T üçgeni (a, b, f)'de bir dik üçgene sahiptir. (a, b, c)'den (a, b, f)'ye olan uzaklık |f - c|'dir ve (a, b, f)'den (d, e, f)'ye olan uzaklık iki boyutlu formülle $\sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2}$'dir. Bu

sonuç şimdi Pythagoras teoreminin T'ye uygulanmasından elde edilir.

Bu ifadenin ilginç bir yönü, noktaların üç boyutlu olduklarının varsayıldığından söz etmemiş olmasıdır. Bu nedenle, herhangi bir sayıda boyuttaki mesafeleri hesaplama yöntemine rastlamış olduk. Örneğin, (1, 0, -1, 4, 2) ve (3, 1, 1, 1, -1) noktaları (bunlar beş boyutlu uzayda bulunmaktadır) arasındaki uzaklık şöyledir:

$$\sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (1-(-1))^2 + (1-4)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+4+9+9} = \sqrt{27}$$

Şeylerin bu şekilde ifade edilmesi bir ölçüde yanlış yöne yönlendirir, çünkü beş boyutlu nokta çiftleri (beş boyutlu noktanın beş gerçek sayıdan başka bir şey olmadığını hatırlayınız) arasında her zaman bir uzaklık olduğunu ve bu mesafelerin nasıl hesaplanabileceğini keşfettiğimizi ortaya koyar. Bununla birlikte, aslında yapmış olduğumuz şey bir uzaklık kavramının *tanımlanmasıdır*. Hiçbir fiziksel gerçeklik bizi beş boyutlu uzaklığın yukarıda anlatıldığı şekilde hesaplanması gerektiği konusunda karar vermeye zorlamaz. Öte yandan, bu yöntem iki ve üç boyutlularda ne yapmamız gerektiğine ilişkin o kadar açık bir doğal genellemedir ki bir başka tanımın benimsenmesi tuhaf olacaktır.

Uzaklık tanımlandıktan sonra diğer kavramları genellemeye başlayabiliriz. Örneğin, bir küre açıkça bir dairenin üç boyutlu eşdeğeridir. Dört boyutlu bir 'küre' nasıl bir şey olacaktır? Uzaklıkta olduğu gibi, iki ve üç boyutlu versi-

yonlarını aslında boyut sayısından söz etmeyen bir şekilde tanımlayabilirsek bu soruyu yanıtlayabiliriz. Bu hiç de zor değildir: hem daireler hem de küreler verili bir noktadan (merkez) sabit bir uzaklıktaki (yarıçap) tüm noktalar kümesi olarak tanımlanabilir. Aynı tanımı kesin olarak dört boyutlu küreler için kullanmaktan bizi alıkoyan hiçbir şey bulunmamaktadır. Örneğin, (1, 1, 0, 0) noktasından yarıçapı 3 olan dört boyutlu küre, dört gerçek sayının oluşturduğu (a, b, c, d) dizisidir. Bunun (1, 1, 0 0)'dan uzaklığı (daha önceki tanımlarımıza göre) şöyledir:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 + d^2}$$

Bu nedenle, bu dört boyutlu kürenin bir diğer tanımı aşağıdakine uyan tüm dörtlülerin kümesidir:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2 + d^2} = 3$$

Örneğin, (1, -1, 2, 1) bu türden bir dörtlüdür, bu nedenle verilen dört boyutlu küre içinde bir noktadır.

Genelleme yapılabilecek bir diğer kavram, iki boyutlu bir kare ve üç boyutlu küredir. Şekil 23'ün açıkça gösterdiği gibi, hem a hem de b'nin 0 ve 1 arasında yer aldığı tüm (a, b) sayıları kenar uzunluğu 1 olan bir kare oluşturur ve bunun dört köşesi (0, 0), (0, 1), (1, 0) ve (1, 1) noktalarıdır. Üç boyutta, a, b ve c'nin hepsi 0 ve 1 arasında bulunacak şekilde tüm (a, b, c) noktaları alınarak bir küp tanımlanabilir. Şimdi sekiz köşe bulunmaktadır: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0) ve (1, 1, 1). Elbette, daha yüksek boyutlarda benzer

tanımlar mümkündür. Örneğin, hepsinin koordinatları 0 ve 1 arasında olan tüm (a, b, c, d, e, f) noktaları alınarak altı boyutlu küp, daha açık adıyla uygun bir matematiksel yapı elde edilebilir. Bunun köşeleri her koordinatı 0 ya da 1 olan tüm noktalar olacaktır: her yeni boyut eklendiğinde köşe sayısının iki katına çıkacağını görmek zor değildir, dolayısıyla bu örnekte bunlardan 64 tane bulunmaktadır.

Yalnızca biçimleri *tanımlamaktan* daha fazla şeyler yapılabilir. Beş boyutlu küpün kenar sayılarını hesaplayarak bunu kısaca göstereyim. Kenarın ne olduğu hemen görülemez, fakat bunun için, iki ve üç boyutta ne olduğuna bakarak buradan bir bilgi edinebiliriz: kenar iki komşu köşeyi birleştiren doğrudur ve iki köşe tam olarak bir koordinatta farklılık gösterdiklerinde komşu olarak kabul edilirler. Beş boyutlu bir küpte tipik bir köşe (0, 0, 1, 0, 1) gibi bir noktadır ve biraz önce verilen tanıma göre bunun komşuları (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1) ve (0, 0, 1, 0, 0)'dır. Genelde her köşenin beş komşusu ve bundan dolayı da kendisinden çıkan beş kenarı vardır. (İki ve üç boyutlu iki komşu köşeyi birleştiren doğru kavramına ilişkin genelleme yapmayı okuyucuya bırakıyorum. Bu hesaplama açısından bu önemli değildir.) $2^5 = 32$ köşe olduğundan, 32 x 5 = 160 kenar var gibi görünmektedir. Ancak her kenarı iki defa saymış olduk – her uç nokta için bir defa, bu yüzden doğru yanıt 160'ın yarısı, yani 80'dir.

Yapmakta olduğumuz şeyi özetlemenin bir yolu, koordinatları kullanarak, geometrik kavramları yalnızca sayılar arasındaki ilişkileri içeren eşdeğer kavramlara dönüştürmektir. Geometriyi doğrudan genelleştiremesek de, cebiri genelleştirmemiz *mümkündür* ve bu genelleştirmeyi yüksek

boyutlu geometri olarak adlandırmamız akla yatkın görünmektedir. Açıktır ki, beş boyutlu geometri, üç boyutlu geometri olarak biraz önceki deneyimimizle olduğu kadar doğrudan ilişkili değildir, fakat bu, ona ilişkin düşünmeyi olanaksız hale getirmez ve onun bir model olarak yararlı olmasını önlemez.

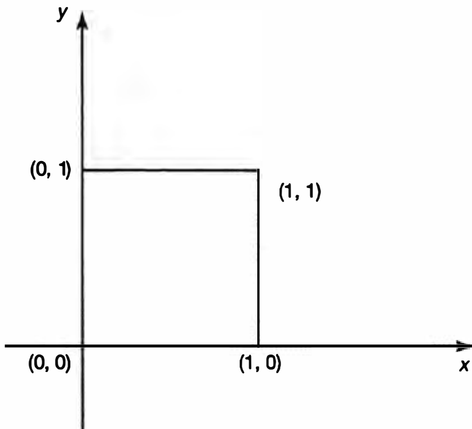
Dört boyutlu uzay göz önüne getirebilir mi?

Aslında, üç boyutlu nesnelerin göz önüne getirilebilmesinin mümkün olduğu, fakat dört boyutluların getirilmesinin mümkün olmadığı biçimindeki ifade yakından incelendiğinde aslında geçerli olmaz. Bir nesnenin göz önüne getirilmesi ona bakmak gibi bir duygu vermekle birlikte, iki deneyim arasında önemli farklılıklar bulunmaktadır. Örneğin, aşina olduğum, ama çok iyi bilmediğim bir odayı göz önüne getirmem istense, bunu yapmakta zorlukla karşılaşmam. Buna ilişkin olarak, kaç tane sandalyesi bulunduğu ya da döşemenin ne renkte olduğu gibi basit sorular sorulursa bunları genellikle yanıtlayamam. Bu, zihinsel görüntü ne olursa olsun, bunun bir fotografik tasvir olmadığını gösterir.

Matematiksel bağlamda, bir şeyi göz önüne getirebilmek ile getirememek arasındaki önemli fark, birinci durumda durup hesaplamak yerine soruların bir ölçüde doğrudan yanıtlanabilmesidir. Doğrudan yanıt verilmesi elbette bir derece olayıdır, fakat nesne bu yüzden daha az gerçeğe sahip değildir. Örneğin, üç boyutlu bir küpün kenar sayısını vermem istenirse, bunun tepenin çevresinde

dört, tabanın kenarında dört ve üstten alta giderken dört olmak üzere toplam on iki kenar olduğunu 'görmüş gibi' yanıtlayabilirim.

Daha yüksek boyutlarda 'görmüş gibi' yanıt vermek güçleşir ve beş boyutlu benzer bir soruyu tartışırken benim yaptığım gibi genellikle daha fazla argüman yürütmek zorunda kalınır. Ancak bu bazen mümkündür. Örneğin, tıpkı üç boyutlu bir küpün yüzleri birbirine dönük ve karşılıklı köşeleri birleşmiş iki kareden oluşması gibi, dört boyutlu bir küpü de yüzleri birbirine dönük ve karşılıklı köşeleri kenarlarla birleşmiş (dördüncü boyutta) iki tane üç boyutlu küpten oluşmuş olarak düşünebilirim. Dört boyutlu uzaya ilişkin kafamda tümüyle açık bir resim olmamakla birlikte, iki adet üç boyutlu küpün her biri için on iki kenar olduğunu ve sekiz kenarın köşelerini tümüyle birleştirdiğini hâlâ 'görebilirim'. Bu toplam olarak 12 + 12 + 8 = 32'yi verir. Bundan sonra beş boyutlu bir küpün bunların yine karşılıklı köşeleri birleşmiş iki tanesinden oluştuğunu 'hemen hemen' görebilirim. Kenarların toplamı 32 + 32 + 16 = 80'dir (her dört boyutlu küp için 32 ve aralarındaki kenarlar için 16) ve bu da daha önce elde ettiğim sonucun tamı tamına aynısıdır. Dolayısıyla, dört ve beş boyutluları gözümün önüne getirmede bir ölçüde kaba bir yeteneğim bulunmaktadır. ('Göz önüne getirmek' sözcüğünden rahatsızlık duyuyorsanız, 'kavramlaştırmak' gibi bir başka sözcüğü kullanabilirsiniz). Elbette, bu, üç boyutlularda göz önüne getirmekten çok daha zordur; örneğin, üç boyutlu bir küpü kendi etrafında çevirdiğinizde ne olduğuna ilişkin soruları doğrudan yanıtlayabilirken, dört boyutlu bir küp için bunu yanıtlayamam – fakat her ikisinin de göz önüne



23. Bir birim kare ve bir birim küp.

getirilmesi mümkün olmayan elli üç boyutlu hallerinden kesinlikle kolaydır bu. Bazı matematikçiler dört boyutlu geometri üzerine uzmanlaşırlar ve onların dört boyutlu göz gönüne getirme yetenekleri çok gelişmiştir.

Bu psikolojik nokta geometrinin çok ötesine geçen matematik açısından önemlidir. İnsanın yaşamını matematiksel araştırmaya adamasının keyiflerinden biri, bilgi kazandıkça, bir zamanlar bir ya da iki saat sıkı düşünme gerektiren giderek daha fazla sayıda sorunun yanıtlarını 'hemen hemen görebilmesi' ve soruların geometrik olmasının gerekmemesidir. Bu ifadenin basit bir örneği, 471 x 638 = 638 x 471 olmasıdır. İki uzun çarpma yaparak ve bunların aynı sonucu verdiklerini kontrol ederek bunun doğruluğunu inceleyebiliriz. Ancak, buna karşılık, 471'e 638 dikdörtgeninde düzenlenmiş noktaların ızgarasını düşündüğümüzde, birinci toplamın her satırdaki nokta sayısının toplamı ve ikincisinin her sütundaki nokta sayısının toplamı olduğunu görürüz ve elbette bunlar aynı sonucu vermelidir. Burada zihinsel bir resmin bir fotoğraftan oldukça farklı olduğuna dikkat ediniz: gerçekten de 471'e 638 dikdörtgeninin 463'e 641 dikdörtgeninden farklı olduğunu göz önüne getirebildiniz mi? Bunu kontrol etmek için kısa kenardaki nokta sayısını sayabilir misiniz?

Yüksek boyutlu geometrinin özelliği nedir?

Yüksek boyutlu geometri düşüncesinden biraz anlam çıkarmak bir şeydir, fakat niçin bu kadar ciddiye alınan bir konu olduğunu açıklamak çok farklı bir şeydir. Daha

önce I. Bölüm'de bir model olarak yararlı olduğunu öne sürdüm, fakat üç boyutlu gerçek uzayda yaşadığımız dikkate alındığında bu nasıl olabilir?

Bu sorunun yanıtı oldukça basittir. I. Bölüm'de değindiğim noktalardan biri, modelin, fiziksel uzayın doğrudan modellenmesinden başka birçok başka amaç için kullanılabilmesiydi. Örneğin, genellikle bir nesnenin hareketini farklı zamanlarda aldığı mesafeyi temsil eden bir grafik çizerek temsil ederiz. Bu grafik bir düzlemde bir eğri olacaktır ve eğrinin geometrik özellikleri nesnenin hareketine ilişkin bilgiye karşılık gelecektir. Bu hareketi temsil etmek için niçin iki boyutlu geometri uygun olmaktadır? Çünkü söz konusu olan iki sayı vardır –geçen süre ve alınan mesafe– ve söylemiş olduğum gibi iki boyutlu uzayı tüm sayı çiftlerinin toplamı olarak düşünebiliriz. Bu bize yüksek boyutlu geometrinin niçin yararlı olacağı konusunda bir ipucu verir. Evrende gizli olarak var olan herhangi bir yüksek boyutlu uzay olmayabilir, fakat birkaç sayının toplamını ele almamız gereken birçok durum mevcuttur. Bunlardan ikisini çok kısaca anlatacağım ve bundan sonra çok sayıda diğerleri açıklığa kavuşacaktır.

Bir sandalyenin konumunu tanımlamak istediğimi varsayalım. Bu sandalye dik duruyorsa, konumu tümüyle ayaklarından ikisinin döşemeye değdiği noktalar tarafından belirlenir. Bu iki noktanın her biri iki koordinat ile temsil edilebilir. Sonuçta, ortaya sandalyenin konumunu tanımlamakta kullanılabilen dört sayı çıkar. Ancak bu sayılar birbiriyle ilişkilidir, çünkü ayakların uçları arasındaki mesafe sabittir. Bu mesafe d ise ve ayaklar döşemeye (p, q) ve (r, s) noktalarında değiyorsa, Pythagoras teoremine

göre $(p-r)^2 + (q-s)^2 = d^2$'dir. Bu p, q, r ve s üzerine bir kısıtlama getirir ve bu kısıtlamayı tanımlamanın bir yolu geometrik dilin kullanılmasıdır: dört boyutlu uzayda bulunan (p, q, r, s) noktası belli bir üç boyutlu 'yüzeyde' bulunmak zorundadır. Daha karmaşık fiziksel sistemler benzer şekilde analiz edilebilir ve boyutlar çok yüksek hale gelir.

Çoklu boyutlu geometri ekonomide de çok önemlidir. Örneğin, bir şirketin hisse senetlerini satın almanın akıllıca bir iş olup olmadığını merak ediyorsanız, karar vermenizde size yardımcı olacak bilginin büyük bölümü –işgücü sayısı, çeşitli varlıklarının değerleri, hammaddelerin maliyetleri, faiz oranı vb.– sayılar biçiminde olacaktır. Bir dizi halinde alındığında bu sayılar yüksek boyutlu bir uzaydaki bir nokta olarak düşünülebilir. Belki de diğer bazı benzer şirketleri analiz ederek yapmak isteyeceğiniz şey, o uzayın bir bölgesini, hisse senetlerini almanın iyi bir fikir olduğu bölgeyi belirlemektir.

Kesirli boyut

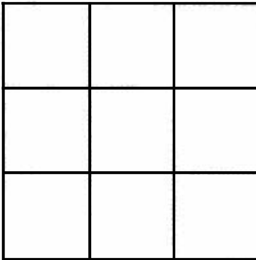
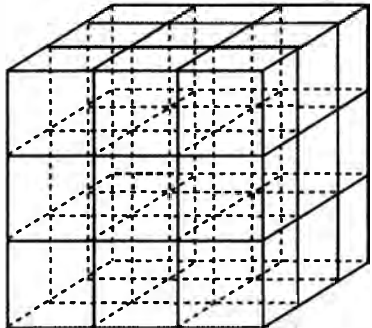
Buraya kadarki tartışmada belirgin olarak görünen bir şey varsa, o da bir biçimin boyutlarının her zaman bir tamsayı olacağıdır. Bir noktayı –hatta matematiksel olanı– belirlemek için iki buçuk koordinata ihtiyaç duymak ne anlama gelebilir?

Bu argüman zor görünebilir, fakat 2. bölümde $2^{3/2}$ sayısını tanımlamadan önce de çok benzer bir güçlükle karşılaşmıştık ve soyut yöntemi kullanarak bunu aşmayı becermiştik. Boyut için de buna benzer bir şeyi yapabilir

miyiz? Bunu yapmak istersek, bu sayının bir tamsayı olduğunu hemen dolaylı olarak söylemeyen, boyutla ilişkili bir özellik bulmak durumundayız. Bu, koordinat sayısı ile ilgili her şeyi dışarıda bırakmaktadır, ki bunlar boyut düşüncesi ile o kadar yakından ilişkilidir ki başka bir şeyi düşünmek çok zor görünmektedir. Ancak, bu bölümün başında kısaca değinilen ve bize istediğimiz şeyi tam olarak veren bir başka özellik daha mevcuttur.

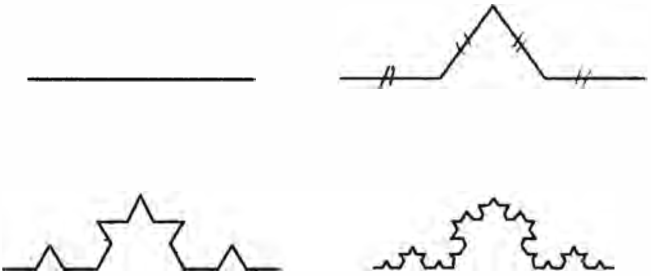
Boyutla değişen geometrinin önemli bir özelliği, bir şekli her yöne doğru t faktörü ile genişlettiğinizde şeklin boyutuna ne olduğunu belirleyen kuraldır. Büyüklük ile uzunluğu, alan ya da hacmi anlatmak istiyorum. Bir boyutta büyüklük t katına ya da t^1 katına çıkmaktadır, iki boyutta t^2 katına çıkmaktadır ve üç boyutta t^3 katına çıkmaktadır. Bunun için t'nin kuvveti şeklin boyutunu anlatmaktadır.

Buraya kadar tamsayıları resimden çıkarmayı başaramadık, çünkü iki ve üç sayıları 'alan' ve 'hacim' sözcüklerinde dolaylı olarak yer almaktadır. Ancak, bu sözcükler olmadan işleri şu şekilde yürütebiliriz. Kenar uzunluğu üç olan bir karenin kenarının karesi niçin kenar uzunluğu bir olan karenin alanının dokuz katıdır? Bunun nedeni, büyük karenin daha küçük dokuz eş kareye bölünebilmesidir (Şekil 24'e bakınız). Benzer şekilde, üçe-üçe-üç küp de yirmi yedi tane bire-bire-bir küpe bölünebilir, böylece hacmi bire-bire-bir küpün hacminin yirmi yedi katıdır. Bu nedenle, bir küp 1'den büyük bir tamsayı olan t faktörü ile genişletildiğinde, yeni küpün eskisinin t^3 adet kopyasına bölünebilmesinden dolayı bu küpün üç boyutlu olduğunu söyleyebiliriz. 'Hacim' sözcüğünün son cümlede yer almadığına dikkat ediniz.

24. Bir karenin $9 = 3^2$ adet küçük kareye ve bir küpün $27 = 3^3$ adet küçük küpe bölünmesi.

Şimdi şu soruyu sorabiliriz: yukarıdaki gibi bir mantık yürütebileceğimiz ve tamsayı olmayan bir sonuç elde edebileceğimiz bir şekil var mıdır? Bunun yanıtı evettir. Bilinen en basit örneklerden biri Koch kar tanesidir. Bunu doğrudan anlatmak mümkün değildir: bunun yerine şu sürecin limiti olarak tanımlanır. Örneğin, uzunluğu bir olan bir doğru parçasını ele alarak başlayın. Sonra bunu üç eşit parçaya bölün ve orta parçanın yerine, bu orta parçanın tabanını oluşturduğu bir eşkenar üçgenin diğer iki kenarını koyun. Ortaya, her biri üçte bir uzunluğunda olan dört doğru parçasından yapılmış bir şekil çıkar. Bunların her birini üç eşit parçaya bölün ve yine ortadaki her parçayı bir eşkenar üçgenin diğer iki kenarı ile değiştirin. Şimdi ortaya, her birinin uzunluğu dokuzda bir olan on altı doğru parçasından oluşmuş bir şekil çıkar. Bu sürecin nasıl devam edeceği açıktır: bunun birkaç aşaması Şekil 25'te gösterilmiştir. Bu sürecin, şekilde görüldüğü gibi, sınırlayı-



25. Koch kar tanesinin oluşturulması.

cı bir şekle doğru yol aldığını ayrıntılı biçimde kanıtlamak çok zor değildir ve bu şekil Koch kar tanesidir. (Bunlardan üç tanesini alıp hepsini birlikte bir üçgenin etrafına yerleştirdiğinizde bir kar tanesine benzer.)

Koch kar tanesinin bazı ilginç özellikleri bulunmaktadır. Bizi ilgilendiren özelliği, kendisinin daha küçük kopyalarından oluşturulabilmesidir. Bir kez daha, bu durum şekilden görülebilir: bu şekil dört kopyadan oluşmaktadır ve her kopyası şeklin bütününün bir bölü üç faktörüyle küçültülmüşüdür. Şimdi de boyutuna ilişkin ne söylediğini ele alalım.

Şekil d-boyutlu ise, boyutunun üçte biri kadar küçülttüğümüzde, boyutunun 3^d faktörü ile küçülmesi gerekir. (Görmüş olduğumuz gibi, d 1, 2 ya da 3 olduğunda bu doğrudur.) Böylece, bu şekli daha küçük kopyalarında oluşturabilirsek, bunlardan 3^d adedine ihtiyacımız olacaktır. Koch kar tanesi için dört kopyaya ihtiyaç olduğundan, bunun boyutu olan d, $3^d = 4$'ü veren sayı olmalıdır. $3^1 = 3$ ve $3^2 = 9$ olduğundan, bu, d'nin 1 ve 2 arasında olduğu anla-

mına gelir, dolayısıyla bu bir tamsayı değildir. Aslında, bu sayı $\log_3 4$'tür ve bu da yaklaşık olarak 1,2618595'e eşittir.

Bu hesaplama Koch kar tanesinin kendisinin küçük kopyalarına ayrılabilmesine bağlıdır ve bu pek alışılmamış bir özelliktir: bir daire bile bu özelliğe sahip değildir. Bununla birlikte, yukarıdaki düşünceyi daha da geliştirmek ve daha yaygın bir şekilde uygulanabilen bir boyut tanımı vermek mümkündür. Soyut yöntemin diğer kullanımlarında olduğu gibi, bu, Koch kar tanesinin ve benzeri egzotik şekillerin 'gerçek boyutunu' keşfettiğimiz anlamına gelmez, yalnızca belli özelliklere uygun tek mümkün tanımı bulduğumuz anlamına gelir. Aslında, boyutu tanımlamanın farklı sonuçlar veren diğer yolları da mevcuttur. Örneğin, Koch kar tanesinin 'topolojik boyutu' 1'dir. Kabaca söylemek gerekirse, bunun nedeni, tıpkı bir doğru gibi, iç bölgesindeki noktaların herhangi birinin kaldırılması yoluyla birbiriyle bağlantısı kesilmiş iki parçaya ayrılabilmesidir.

Bu da soyutlamanın ve genellemenin ikiz süreçlerine ilginç bir şekilde ışık tutar. Bir kavramı genelleştirmek için onunla ilgili bazı özelliklerin bulunması ve bunların genelleştirilmesi gerektiğini önermiştim. Genellikle bunu yapmanın tek bir doğal yolu bulunmaktadır, fakat bazen farklı özellik kümeleri farklı genellemelere yol açar ve bazen birden fazla genelleme daha yararlıdır.

VI. Bölüm

GEOMETRİ

Belki de tüm zamanların en etkili matematik kitaplarından biri, İÖ 300 civarında yazılan Eukleides'in *Elemanlar* adlı kitabıdır. Eukleides iki bin yıldan daha uzun süre önce yaşamış olmakla birlikte, birçok açıdan tanınmış ilk modern matematikçidir – ya da en azından bizim bildiğimiz ilk modern matematikçidir. Özellikle, kitabına beş aksiyomla başlayarak ve bunlardan çok sayıda geometri teoremi türeterek aksiyom yöntemini sistematik biçimde kullanan ilk yazar olmuştur. Çoğu insanın yakından tanıdığı geometri, tabii eğer buna aşina iseler, Eukleides geometrisidir, fakat araştırma düzeyinde 'geometri' sözcüğü çok daha geniş anlama sahiptir: günümüzün geometricileri zamanlarının büyük bölümünü bir cetvel ve pusula ile geçirmemektedir.

Eukleides geometrisi

Eukleides'in aksiyomları şunlardır. Burada alışılmış tarzı izleyeceğim ve 'doğru' sözcüğünü her iki yöne sonsuz

biçimde uzanan bir çizgi olarak kullanacağım. Bir 'doğru parçası' iki uç noktası olan bir doğru anlamına gelecektir.

1. İki nokta tamı tamına bir doğru parçası ile birleştirilebilir.
2. Bir doğru parçası tek bir çizgiye uzatılabilir.
3. Bir P noktası ve r uzunluğu verildiğinde, merkezi P olan r yarıçaplı bir daire vardır.
4. İki dik açı birbirine benzer.
5. L ve M doğrularını bir N doğrusu keserse ve N'nin bir kenarındaki iç açıların toplamı iki dik açıdan daha küçükse, L ve M doğruları N'nin o tarafında kesişir.

Dördüncü ve beşinci aksiyomlar Şekil 26'da gösterilmiştir. Dördüncü aksiyom bir dik açıyı tam diğerinin üzerine gelecek şekilde kaydırabileceğiniz anlamına gelir. Beşincisi ise, α ve β ile işaretlenmiş açıların toplamı 180 dereceden daha az olduğu için L ve M doğrularının N'nin sağında bir yerde kesiştiklerini ifade eder. Beşinci aksiyom, belli bir L doğrusu ve L üzerinde olmayan bir x noktası verildiğinde, x'ten geçen ve hiçbir zaman L'yi kesmeyen yalnızca tek bir M doğrusu olduğunu söyleyen 'paralel postula' adı verilen postulanın eşdeğeridir.

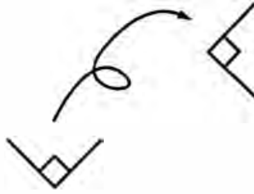
Eukleides o zamanlar bilinen biçimiyle geometrinin tamamının inşasında bu beş aksiyomu kullanmıştır. Burada, örneğin, bir üçgenin açılarının toplamının 180 derece olduğuna ilişkin iyi bilinen sonucun nasıl kanıtlanacağının özeti yer almaktadır. İlk adım N doğrusunun L ve M paralel doğrularını kesmesi durumunda, karşı açılarının eşit olduğunun gösterilmesidir. Diğer bir deyişle, Şekil 27'deki

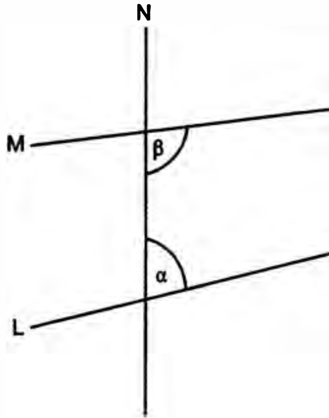
gibi bir durumda $\alpha = \alpha'$ ve $\beta = \beta'$ olmalıdır. Bu beşinci aksiyomun bir sonucudur. Birincisi, $\alpha' + \beta$'nın en azından 180 olduğunu ya da aksi durumda L ve M'nin kesişmek (şekilde N doğrusunun solunda bir yerde) durumunda kalacaklarını söylemektedir. α ve β birlikte bir doğru oluşturduklarından, $\beta = 180 - \alpha$"dir, bu yüzden $\alpha' + (180 - \alpha)$ en azından 180'dir ve bu, α"nın en azından α kadar büyük olması gerektiği anlamına gelir. Aynı argümanla $\alpha + \beta = \alpha + (180 - \alpha')$ en azından 180 olmalıdır, bu yüzden α en azından α' kadar büyüktür. Bunun gerçekleşmesinin tek yolu, α ve α"nın eşit olmasıdır. $\beta = 180 - \alpha$ ve $\beta' = 180 - \alpha'$ olduğundan, aynı şekilde $\beta = \beta'$ sonucu çıkar.

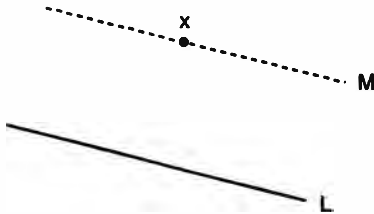
Şimdi de ABC bir üçgen olsun ve A, B ve C'deki açıları sırasıyla α, β ve γ olsun. İkinci aksiyoma göre AC doğru parçasını L doğrusuna uzatabiliriz. Paralel postula B'den geçen ve L ile kesişmeyen bir M doğrusunun olduğunu söylemektedir. α' ve γ' Şekil 28'de işaretlenen açılar olsun. Yaptığımız kanıtlamaya göre $\alpha = \alpha'$ ve $\gamma = \gamma'$ olur. α', β ve γ' birlikte bir doğru oluşturduklarından $\alpha' + \beta + \gamma' = 180$'dir. Bu yüzden zorunlu olarak $\alpha + \beta + \gamma = 180$'dir.

Bu argüman gündelik yaşam hakkında bize ne söylemektedir? Uzayda A, B ve C gibi üç nokta alındığında ve ABC üçgeninin üç açısı dikkatlice ölçüldüğünde bunların toplamının 180 derece olacağı açık bir sonuç gibi görünmektedir. Basit bir deney bunu doğrulayacaktır: bir kağıdın üzerine bir üçgen çizin, elinizden geldiği kadar titizce kesin, her birinden bir köşe olmak üzere yırtın, köşeleri bir araya getirin ve açıların aslında bir doğru oluşturduğunu görün.

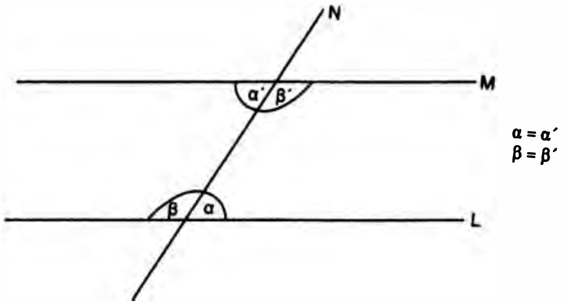
Şimdi, açılarının toplamı 180 derece olmayan fiziksel bir üçgenin düşünülemeyeceğine ikna olduysanız, bu du-



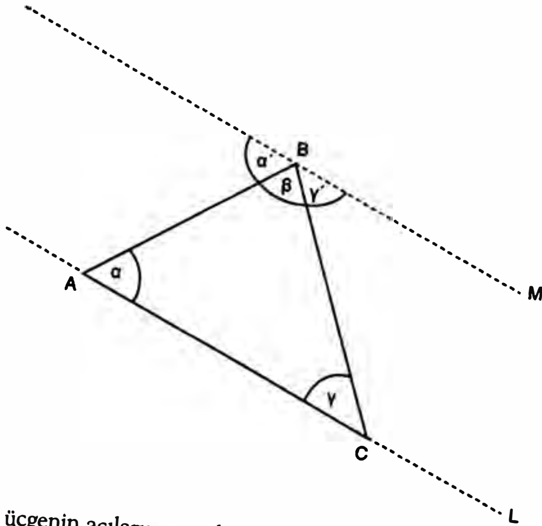




26. Eukleides'in dördüncü aksiyomu ve beşincisinin iki versiyonu.



27. Eukleides'in beşinci aksiyomunun bir sonucu.



28. Bir üçgenin açılarının toplamının 180 derece olduğunun kanıtlanması.

rum İÖ 300 yılında Eukleides'ten 18. yüzyılın sonunda Immanuel Kant'a kadar herkesin çıkardığı sonuç bu olduğu için onlara eşlik etmiş oluyorsunuz. Aslında, Kant o kadar ikna olmuş durumdaydı ki *Saf Aklın Eleştirisi* adlı yapıtının önemli bir bölümünü Eukleides geometrisinden nasıl kesin olarak emin olunabileceği sorusuna ayırmıştır.

Ancak, Kant yanılmıştı: yaklaşık otuz yıl sonra büyük matematikçi Carl Friedrich Gauss böyle bir üçgeni tasarlamayı gerçekleştirebildi ve bunun sonucunda Hanover Krallığı'ndaki Hohenhagen, Inselberg ve Brocken dağ zirvelerinin oluşturduğu üçgenin açılarını, aslında toplamlarının 180 derece olup olmadığını test etmek için ölçtü. (Bu ünlü bir öyküdür fakat, dürüst olmak gerekirse, beni aslında Eukleides geometrisini test etmeye çalışıp çalışmadığı konusunda biraz kuşku olduğuna işaret etmek zorunda bırakmaktadır.) Yaptığı deney, açıların yeterince kesin biçimde ölçülmesinin zorluğundan dolayı tam sonuca ulaşamamıştır, fakat deneye ilişkin ilginç nokta, sonucundan çok, Gauss'un merak edip buna girişmesidir. Burada verdiğim argümanla ilgili yanlış ne olabilir?

Aslında, bu, sorulması gereken doğru soru değildir, çünkü *argüman* doğrudur. Bununla birlikte, Eukleides'in beş argümanına dayandığından, bu aksiyomlar günlük hayatta doğru olmadan günlük hayat hakkında bir şeyi dolaylı olarak ifade etmez. Bu yüzden, Eukleides'in aksiyomlarının doğruluğu sorgulanarak argümanın *öncülleri* sorgulanabilir.

Fakat aksiyomlardan hangisi en azından biraz kuşkuludur? Herhangi birinde bir hata olduğunu bulmak zordur. Gerçek dünyada iki noktayı bir doğru parçası ile birleştir-

mek isterseniz, yapmanız gereken tek şey bir ip parçasını her iki noktadan geçecek şekilde germektir. Bu doğru parçasını bir doğru şeklinde uzatmak isterseniz, bunun yerine bir lazer ışınını kullanabilirsiniz. Benzer şekilde, istenen herhangi bir yarıçapa sahip daireler üretmek zor değildir ve deneyler, bir kağıdın iki dik açılı köşesini aldığınızda, bunlardan birini ötekinin tam üstüne yerleştirebileceğinizi göstermektedir. Son olarak, iki doğrunun, sonsuz uzunluktaki bir çift demiryolu rayı gibi sonsuza kadar gitmesini ne önleyebilir?

Paralel postula

Tarihsel olarak en fazla kuşku ya da en azından rahatsızlık uyandıran postula, paralel postuladır. Bu, diğer aksiyomlardan daha karmaşıktır ve önemli bir şekilde sonsuzu içerir. Üçgenin açılarının toplamının 180 derece olduğu kanıtlandığında, bu kanıtlamanın uzayın en uç yerlerinde neler olduğuna temellenmesi tuhaf değil midir?

Paralel postulayı daha dikkatlice inceleyelim ve niçin bu kadar açık biçimde doğru göründüğünü anlamaya çalışalım. Belki de aklımızın bir köşesinde şu argümanlardan biri yatmaktadır.

(1) Bir L doğrusu ve bunun üzerinde olmayan bir x noktası verildiğinde, x'ten geçen bir paralel doğru üretmek için yapmanız gereken tek şey, x'ten geçen doğruyu *L ile aynı yönde* gidecek şekilde seçmenizdir.
(2) y, L'nin x ile doğrultusunda ve L'den aynı uzaklıkta bir başka nokta olsun. x ve y'yi bir doğru parçası ile birleşti-

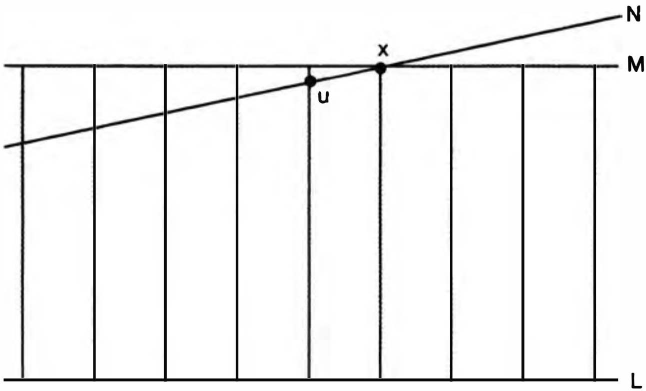
rin (aksiyom 1) ve sonra bu doğru parçasını M doğrusuna uzatın (aksiyom 2). Bu durumda M ve L kesişmeyecektir.

(3) M, L'nin x ile doğrultusundaki ve onlardan aynı uzaklıktaki tüm noktalardan oluşan bir doğru olsun. Açıktır ki, bu doğru, L ile kesişmeyecektir.

Buraya kadarki argüman L'ye paralel olan doğru ile ilgilidir. Bu türden en fazla bir doğru olabileceğini göstermeyi amaçlayan daha karmaşık bir argüman şöyledir ve bu paralel postulanın diğer bölümünü oluşturmaktadır.

(4) L'yi, doğru parçalarından biri x'ten geçecek şekilde, eşit olarak yerleştirilmiş dikey doğru parçaları (Şekil 29'daki gibi demiryolu rayı oluşturacak şekilde) ile M'ye birleştirin. Şimdi de N'nin x'ten geçer bir başka doğru olduğunu varsayalım. x'in bir tarafında N doğrusu L ve M arasında bulunmalıdır, bu nedenle L ve M arasında yer alan u noktasında bir sonraki doğru parçasıyla kesişir. Basit olsun diye, u'nun M ile L arasındaki doğru parçasının % 1'inde yer aldığını varsayalım. O zaman, N bir sonraki doğru parçasını % 2' kadar uzağında kesecektir ve bu böyle sürecektir. Bu nedenle, 100 doğru parçası sonra N'nin L'yi kesmesi gerecektir. N'ye ilişkin olarak yaptığımız tek varsayım bunun M olmadığı şeklinde olduğundan, buradan M'nin x'ten geçen ve L'yi kesmeyen tek doğru olduğu sonucu çıkar.

Son olarak, L'ye paralel olan ve verilen noktadan geçen doğrunun hem mevcut olduğunu ve hem de tek olduğunu gösteren bir argüman şöyledir.



29. Paralel doğruların benzersizliği.

(5) Düzlemde bir nokta Kartezyen koordinatlarla tanımlanabilir. Bir L doğrusu (dikey olmayan), $y = mx + c$ biçiminde bir denkleme sahiptir. C'yi değiştirerek L'yi aşağı ve yukarı hareket ettirebiliriz. Açıktır ki, bu şekilde oluşturulan hiçbir iki doğru birbirini kesmez ve her nokta bunlardan yalnızca birinin üstünde yer alır.

Biraz önce yapmış olduğum şeyin paralel postulayı kanıtlamak olduğuna dikkat ediniz ve XIX. yüzyıl öncesinde birçok matematikçinin yapmaya çalıştığı şey tamı tamına buydu. En fazla yapmayı istedikleri şey, bunu diğer dört aksiyomdan elde etmek, böylece bundan vazgeçmekti. Ancak hiç kimse bunu başaramadı. Vermiş olduğum ve bununla birlikte benzer nitelikteki argümanlarla ilgili sorun, bunların, açık hale getirildiklerinde Eukleides'in ilk dört aksiyomunun doğal sonuçları olmayan gizli varsayım-

ları içermeleriydi. Bunlar görünüşte akla yatkın olmakla birlikte, paralel postulanın kendisinden *daha* akla yatkın değildir.

Küresel geometri

Bu gizli varsayımları açığa çıkarmanın uygun bir yolu, aynı argümanları farklı bir bağlamda, paralel postulanın kesin olarak doğru olmadığı bir bağlamda incelemektir. Bunu aklımızda tutarak bir an için kürenin yüzeyi hakkında düşünelim.

Paralel postulanın kürenin yüzeyinde doğru olmadığını söylemenin ne anlama geldiği hemen açıklığa kavuşmamaktadır, çünkü kürenin yüzeyi hiçbir doğruyu içermez. Bu zorluğu matematikte çok önemli bir düşünceyi uygulayarak aşacağız. Soyut yöntemin uygulanmasının çok önemli bir örneği olan bu düşünce, bir doğrunun ne anlama geldiğinin *yeniden yorumlanması* ve böylece bir kürenin her şeye rağmen doğruları içerdiğinin gösterilmesidir.

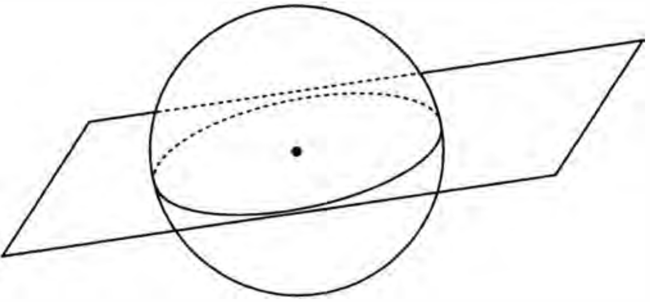
Bu aslında doğal bir tanımdır: x'ten y'ye giden doğru parçası, *tümüyle kürenin yüzeyi içinde yer alan* ve x'ten y'ye olan en kısa yoldur. x ve y'yi kentler olarak ve doğru parçasını bir uçağın alacağı en kısa yol olarak düşünebiliriz. Bu yol 'büyük dairenin' bir parçası olacaktır ve bunun anlamı kürenin merkezinden bir uçağı geçirerek ve yüzeyi nerede kestiğini görerek elde edilen bir daire olmasıdır (Şekil 30'a bakınız). Büyük bir daireye örnek, yeryüzündeki ekvatordur (tartışmamız açısından bunu tam bir daire olarak alacağım). Doğru parçalarını tanımlamakta kullan-

dığımız yol dikkate alındığında büyük bir daire 'doğru'nun iyi bir tanımını verir.

Bu tanımı benimsediğimizde paralel postula kesin olarak yanlıştır. Örneğin, L yeryüzünün ekvatoru ve x de kuzey yarımkürede bir nokta olsun. x'ten geçen büyük bir dairenin yarısının kuzey yarımkürede, yarısının da güney yarımkürede yer alacağını ve ekvatoru birbirinin tümüyle karşısında bulunan iki noktada geçeceğini görmek zor değildir (Şekil 31'e bakınız). Diğer bir deyişle x'ten geçen ve L'yi kesmeyen hiçbir doğru (bunu hâlâ büyük bir daire olarak alıyorum) bulunmamaktadır.

Bu ucuz bir trük gibi görünmektedir: 'doğru'yu yeni bir biçimde tanımlarsam, paralel postulanın artık doğru olmasının sona ermesi hiç de şaşırtıcı olmayacaktır. Fakat bu şaşırtıcı olması için yapılmamıştır – aslında tanım tam da bu amaç için geliştirilmiştir. Paralel postulaya ilişkin olarak girişilen *kanıtlamalardan* bazıları incelendiğinde ilginç hale gelmektedir. Bu durumların her birinde, küresel geometri için geçerli olmayan bir varsayımı keşfedeceğiz.

Örneğin argüman (1) 'aynı yönde' deyimiyle neyin anlatılmak istendiğinin açık olduğunu varsaymaktadır. Fakat kürenin yüzeyinde bu hiç de açık değildir. Bunu görmek için Şekil 32'de gösterilen P, Q ve N noktalarını ele alalım. N Kuzey Kutbu'dur, P ekvator üzerinde yer almaktadır ve Q da ekvator üzerindedir ve P'den dörtte bir kadar uzaklıktadır. Yine Şekil 32'de, P'de, ekvator boyunca Q'ya doğru işaret eden küçük bir ok bulunmaktadır. Q'da aynı yöne giden hangi ok çizilebilir? Doğal yön, P'den uzaklaşan yine ekvator boyunca bir yön seçmektir. N'den tekrar aynı yöne bir ok nasıl olacaktır? Bunu şöyle

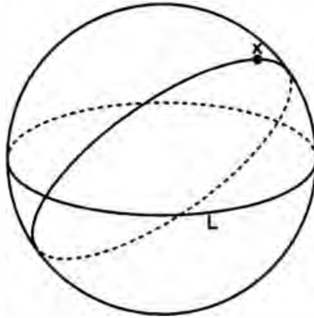


30. Büyük bir daire.

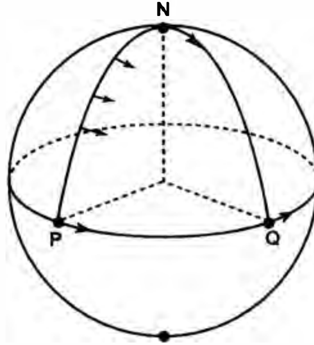
seçebiliriz. P'den N'ye bir doğru parçası çizin. P'deki ok bu doğru parçasıyla dik açı yapacağından N'deki ok bu doğru parçasına dik açılı olmalıdır, bunun anlamı aslında P' yönüne işaret etmesidir. Ancak burada bir sorun vardır. N'de çizmiş olduğumuz doğru Q'daki ile aynı yöne işaret etmemektedir.

(2) nolu argüman ile ilgili sorun bunun yeterince ayrıntılı olmamasıdır. Orada tanımlanan M doğrusu L ile niçin kesişmesin? Yine de, L ve M küresel doğrular ise bunlar *kesişecektir*. (3) nolu argümana gelince, bu argüman M'nin bir doğru olduğunu varsaymaktadır. Bu, küre için doğru değildir: L ekvator olursa ve M ekvatorun 1600 kilometre kuzeyindeki tüm noktalardan oluşursa, M büyük bir daire *değildir*. Aslında, bu sabit bir enlem doğrusudur, yani bir pilotun ya da denizcinin söyleyeceği gibi, iki nokta arasındaki en kısa yolu vermez.

(4) nolu argüman biraz farklıdır, çünkü paralel doğruların varlığından çok benzersiz oluşlarıyla ilgilidir. Bunu



31. Paralel postula küresel geometri için doğru değildir.



32. 'Aynı yönde' deyimi kürenin yüzeyinde anlamlı değildir.

sonraki kesimde tartışacağım. (5) nolu argüman büyük bir varsayım ileri sürer: bu, uzayın Kartezyen koordinatlarla tanımlanabileceği varsayımıdır. Yine, bu, kürenin yüzeyi için doğru değildir.

Kürenin işin içine katılmasındaki amaç, aslında şunu söyleyen bir varsayımı (1), (2), (3) ve (5)'ten ayrı tutma-

mıza olanak sağlamasıdır: 'Ele aldığımız geometri küresel geometri değildir.' Bunun neresinin yanlış olduğunu merak edebilirsiniz: yine de küresel geometri *yapmıyoruz*. Ayrıca paralel postula aslında Eukleides'in diğer aksiyomlarından elde edilmiyorsa, bunun elde edilmediğini göstermeyi nasıl umut edebileceğinizi de merak edebilirsiniz. Matematikçilerin yüzyıllardır uğraştıkları halde bunu elde edemediklerini söylemek iyi bir şey değildir. İki yüz yıllık süre içinde bir genç dehanın sonunda bir kanıtlamayı ortaya koyacak harika bir fikir geliştirmeyeceğinden nasıl emin olabiliriz?

Bunun, en azından ilke olarak güzel bir yanıtı bulunmaktadır. Eukleides'in ilk dört aksiyomu sonsuz, düz, iki boyutlu uzay geometrisini tanımlamak için geliştirilmiştir, fakat bu düzlük aslında aksiyomlardan çıkmaktadır. 'Doğru parçası' gibi terimlere, biraz küresel geometride olduğu gibi yeni anlamlar vererek bunları bir şekilde yeniden yorumlayabilirsek (neredeyse 'yanlış yorumlayarak' diyelim) ve bunu yaptıktan sonra ilk dört aksiyomun doğru, fakat paralel postulanın yanlış olduğunu görürsek, paralel postulanın diğer aksiyomlardan çıkmadığını göstermiş olurduk.

Bunun niçin böyle olduğunu görmek üzere, Eukleides'in ilk dört aksiyomu ile işe başlayan, katı mantıksal adımlardan sonra paralel postulaya ulaşan bir kanıtlamanın iddia edildiğini düşünün. Adımlar bir mantığı izlediği için, bunlara yeni anlamlar verilse bile geçerliliklerini sürdüreceklerdir. İlk dört aksiyom yeni yorum altında doğru olduğundan ve paralel postula doğru olmadığından argümanda bir yanlışlık olması gerekir.

Yeniden yorumlamada niçin yalnızca küresel geometriyi kullanmıyoruz? Bunun nedeni, ne yazık ki, Eukleides'in

ilk dört aksiyomunun tümünün kürede doğru olmamasıdır. Örneğin, küre, çapı istenildiği kadar büyük olan daireleri içermez, bu nedenle 3 nolu aksiyom başarısız olur ve Kuzey Kutbu'ndan Güney Kutbu'na yalnızca en kısa bir yol olmadığından 1 nolu aksiyom da doğru değildir. Bu yüzden, küresel geometri paralel postulaya ilişkin olarak girişilen bazı kanıtlamaların eksikliklerini bize göstermiş olmakla birlikte, başka bir kanıtlamanın işleyebilmesinin hâlâ mümkün olma olasılığını gündemde tutar. Onun için, hiperbolik geometri adı verilen bir başka yoruma döneceğim. Paralel postula yine yanlış olacaktır, fakat bu defa 1'den 4'e kadar var olan aksiyomların tümü doğru olacaktır.

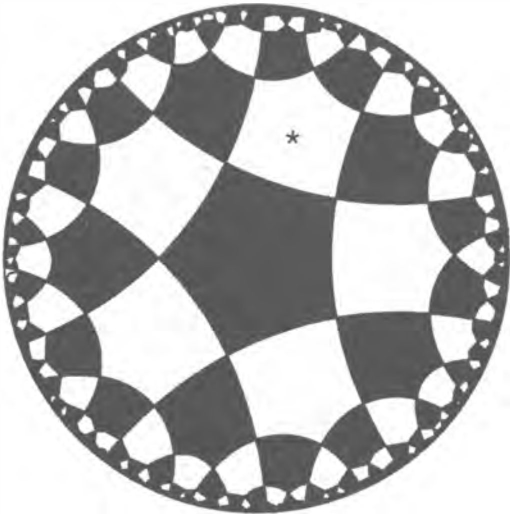
Hiperbolik geometri

Hiperbolik geometriyi anlatmanın birkaç eşdeğer yolu mevcuttur; benim seçtiğim yol büyük Fransız matematikçi Henri Poincaré tarafından keşfedilen ve disk modeli olarak bilinen yoldur. Bunu bu kitapta tam olarak tanımlayamasam da, en azından temel özelliklerinden bazılarını açıklayabilirim ve paralel postulaya ilişkin ne söylediğini tartışabilirim.

Disk modelinin anlaşılması küresel geometrinin anlaşılmasından daha karmaşıktır, çünkü yalnızca 'doğru' ve 'doğru parçası' gibi terimlerin değil, mesafe düşüncesinin de yeniden tanımlanması gerekmektedir. Kürenin yüzeyinde, uzaklığın kolayca kavranan bir tanımı mevcuttur: x ve y noktaları arasındaki mesafe kürenin yüzeyinde yer

alan ve x'ten y'ye giden yolun mümkün olan en kısa uzunluğudur. Benzer bir tanım hiperbolik geometri için geçerli olmakla birlikte, açıklığa kavuşacak nedenlerden dolayı, yani en kısa yolun ne olduğu ve *herhangi bir* yolun uzunluğunun ne olduğu gibi sorulardan dolayı açık değildir.

Şekil 33 hiperbolik diskin düzgün beşgenlerle donatılmış biçimini göstermektedir. Elbette, bu ifadenin açıklanması gerekmektedir, çünkü uzaklığı bildiğimiz şekilde anlarsak bu doğru olmamaktadır: bu 'beşgen'lerin kenarları görünür şekilde düz değildir ve aynı uzunlukta değillerdir. Ancak, hiperbolik diskte mesafeler alışılmış şekilde tanımlanmamıştır ve sınıra yaklaştıkça normal uzaklığa



33. Hiperbolik düzlemin düzgün beşgenlerle donatılması.

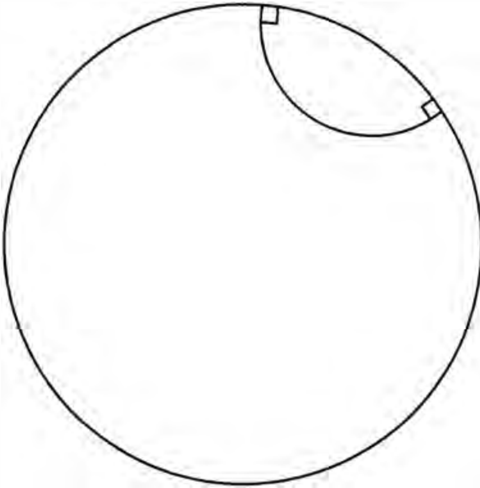
göre daha büyük hale gelirler. Aslında, o kadar büyürler ki sınır, görünüşüne rağmen, merkezden sonsuz uzaktır. Bu yüzden, bir yıldız işareti ile işaretlenmiş beşgenin bir kenarının diğer tüm kenarlardan uzun olmasının nedeni, bu kenarın merkeze yakın olmasıdır. Diğer kenarlar daha kısa görünebilir, fakat hiperbolik uzaklık o şekilde tanımlanır ki bu görünürdeki kısalık kenara yakın olmasıyla tamı tamına karşılanır.

Bu karışık ve çelişkili görünüyorsa, dünyanın tipik bir haritasını düşünün. Herkesin bildiği gibi, dünya yuvarlak ve harita düz olduğundan, mesafeler zorunlu olarak çarpıtılır. Bu çarpıtmayı düzeltmenin çeşitli yolları mevcuttur ve en yaygın olanında, yani Mercator'un projeksiyonunda kutuplar gerçekte olduklarından çok daha büyük görünür. Örneğin, Grönland, Güney Amerika'nın tamamı kadar büyük görünür. Bu türden bir haritanın tepesine ya da dibine ne kadar yaklaşırsanız, mesafeler gerçekte göründüklerinden daha küçüktür.

Bu çarpıtmanın iyi bilinen bir etkisi, dünya yüzeyi üzerinde iki nokta arasındaki en kısa yolun eğri biçiminde olmasıdır. Bu olgu iki şekilde anlaşılabilir. Birincisi, haritayı unutmak ve küresel bir adayı düşünmektir ve kuzey yarımkürede birincisi diğerinin epey doğusunda iki nokta aldığınızda (Paris ve Vancouver iyi bir örnek olabilir) birincisinden ikincisine en kısa yolun batıya doğru gitmek değil, Kuzey Kutbu yakınından geçmek olduğuna dikkat ediniz. İkincisi, orijinal haritayı ele aldığınızda eğer haritanın tepesindeki mesafeler gerçekte olduklarından daha kısa ise, yolculuğun batı gibi biraz kuzeye giderek kısaltılabileceğini öne sürmektir. En kısa yolun ne olacağını tam olarak bu

şekilde görmek güçtür, fakat en azından 'doğru'nun (küresel mesafeler açısından) kıvrılacağı (gerçek harita üzerindeki mesafeler açısından) ilkesi açıktır.

Söylemiş olduğum gibi, hiperbolik diskin kenarına yaklaştığınızda, nasıl göründükleriyle karşılaştırıldığında mesafeler *daha da artmaktadır*. Bunun bir sonucu olarak, iki nokta arasındaki en kısa yol diskin merkezine doğru sapma eğilimindedir. Bu, alışıldık şekilde bir doğru olmadığı (doğrunun tam olarak merkezden geçmemesi durumunda) anlamına gelmektedir. Hiperbolik bir doğru, yani hiperbolik geometri açısından en kısa yol anadairenin sınırını dik açı ile kesen bir dairenin yayıdır (Şekil 34'e bakınız). Şekil 35'teki beşgenlerle donatılmış şekle bakarsanız,



34. Tipik bir hiperbolik doğru.

beşgenlerin kenarlarının, düz görünmemekle birlikte, biraz önce verdiğim tanıma göre hiperbolik doğrular olarak uzatılabilecekleri için aslında hiperbolik doğrular olduklarını göreceksiniz. Aynı şekilde, beşgenlerin hepsi aynı boy ve biçimde olmamakla birlikte, kenara yakın olanlar göründüklerinden çok daha büyük olmasından dolayı, aslında aynı boy ve biçimdedirler – Grönland'da olanın tam tersi. Böylece, tıpkı Mercator'un projeksiyonunda olduğu gibi, disk modeli gerçek hiperbolik geometrinin çarpıtan bir 'haritası'dır.

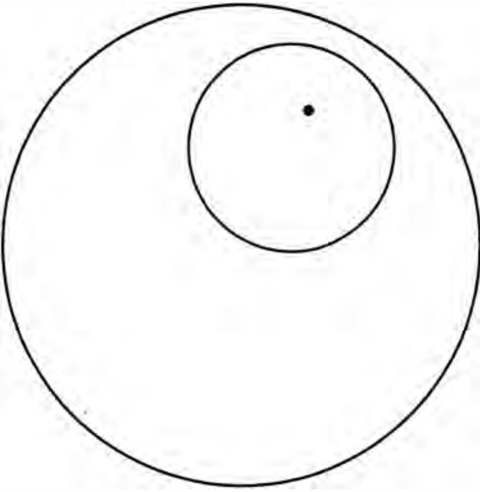
Bu noktada, asıl hiperbolik geometrinin ne olduğunu sormak doğaldır. Diğer bir deyişle, çarpıtan bir harita *neyin* haritasıdır? Kürenin Mercator'un projeksiyonuna yaptığını disk modeliyle ilişkili olarak ne yapmaktadır? Bu sorunun yanıtı oldukça karışıktır. Küresel geometrinin üç boyutlu uzaya oturan bir yüzey olarak kavranması bir bakıma rastlantıdır. Elimizdeki şeyin kürenin bir haritası olduğunu bilmeden, mesafelerin tuhaf şekilde düşünüldüğü Mercator'un projeksiyonu ile *işe başlasaydık*, uzayda çok güzel bir simetrik yüzeyin, mesafelerin alışılmış, kolayca kavranan şekilde en kısa yolların uzunluklarından başka bir şey olmadığı, deyim yerindeyse bu haritanın bir haritası olduğunu keşfedince şaşırır ve memnun olurduk.

Ne yazık ki, hiperbolik geometride böyle bir şey mevcut değildir. Yine de, tuhaf bir şekilde, bu, hiperbolik geometriyi küresel geometriden daha az gerçek bir duruma sokmamaktadır. En azından başlangıçta anlaşılmasını daha zorlaştırmaktadır, fakat II. Bölüm'de vurguladığım gibi, matematiksel kavram gerçeği, ne olduğundan daha çok, ne yaptığı ile ilgilidir. Hiperbolik diskin ne yaptığını söy-

lemek mümkün olduğundan (örneğin, beşgenlerle donatılmış bir cismin merkezdeki beşgenin köşesinde 30 derece döndürülmesinin ne anlama geldiğini bana sorarsanız, size bunun ne olduğunu söyleyebilirim), hiperbolik geometri herhangi bir matematik kavramı kadar gerçektir. Küresel geometri üç boyutlu Eukleides geometrisi açısından daha kolay anlaşılabilir, fakat bu önemli bir fark değildir.

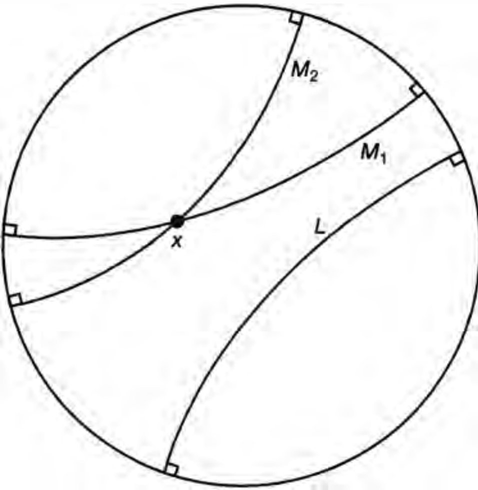
Hiperbolik geometrinin özelliklerinden bir diğeri, Eukleides'in aksiyomlarından ilk dördünü karşılamasıdır. Örneğin, iki nokta yalnızca bir tane hiperbolik doğru parçası ile (diğer bir deyişle, anadaireyi dik açılarla kesen bir daire parçası) birleştirilebilir. Herhangi bir noktanın etrafında yarıçapı büyük olan bir daire bulunamayabilir, fakat bunu düşünmek, diskin kenarına yaklaştıkça mesafelerin daha fazla olduğunu unutmak anlamına gelir. Aslında, hiperbolik daire kenara neredeyse sürtünürse, yarıçapı (yani hiperbolik yarıçapı) aslında çok büyük olacaktır. (Hiperbolik daireler normal dairelere benzer, fakat merkezleri tahmin ettiğimiz yerde değildir. Şekil 35'e bakınız.)

Paralel postulaya gelince, tam da beklediğimiz gibi, hiperbolik geometri için yanlıştır. Bu, (hiperbolik) doğruları L, M_1 ve M_2 olarak işaretlediğim Şekil 36'da görülebilir. M_1 ve M_2 doğruları x olarak işaretlenmiş noktada kesişirler, fakat hiçbiri L ile kesişmez. Bu yüzden, L ile kesişmeyen ve x'ten geçen iki (aslında sonsuz sayıda çok) doğru bulunmaktadır. Bu, tek bir doğru olmasını şart koşan paralel postula ile çelişir. Diğer bir deyişle, hiperbolik geometride paralel postulanın diğer dört aksiyomdan çıkmadıklarını göstermek için aradığımız Eukleides aksiyomlarının alternatif yorumlarını tam olarak buluruz.



35. Tipik bir hiperbolik daire ve bunun merkezi.

Elbette, bu kitapta hiperbolik geometrinin iddia ettiğim özelliklerin tümüne sahip olduğunu kanıtlamadım. Bunun yapılması bir üniversite matematik dersinde birkaç saati alır, fakat en azından hiperbolik uzaklığın nasıl tanımlanabileceğini daha kesin olarak söyleyebilirim. Bunu yapmak için diskin kenarına yakın yerlerde mesafelerin göründüklerinden *ne kadar* fazla olduklarını belirtmem gerekir. Bu sorunun yanıtı, P noktasındaki hiperbolik mesafelerin 'normal mesafeler'den $1/d^2$ kadar fazla olduklarıdır ve burada d, P'den dairenin sınırına kadar olan uzaklıktır. Bunu bir başka şekilde ifade edecek olursak, hiperbolik disk içinde hareket ederseniz, P'yi geçerken hızınız, hiperbolik uzaklık kavramına göre, görünen hızınızın $1/d^2$ katı



36. Paralel postula hiperbolik düzlemde yanlıştır.

olacaktır ve bunun anlamı sabit bir hiperbolik hızı sürdürmeniz durumunda, diskin sınırına yaklaştıkça giderek daha yavaş hareket ediyor görünmenizdir.

Hiperbolik geometriyi bir kenara bırakmadan, daha önce verdiğim (4) nolu argümanın paralel doğruların benzersiz olduklarını niçin kanıtlayamadığını görelim. Buradaki düşünce, bir L doğrusu ve L üzerinde olmayan bir x noktası ve x'ten geçen ve L ile kesişmeyen bir M doğrusu verildiğinde, L ve M'nin, hem L hem de M'ye dik olan bazı doğru parçaları ile birleştirilebileceği ve böylece L ve M'nin dikdörtgenlere bölünebileceği düşüncesiydi. Bunun yapılabileceği açık görünmektedir, fakat hiperbolik dünyada bu mümkün değildir, çünkü bir dörtgenin açıları her

zaman 360 dereceden daha *küçüktür*. Diğer bir deyişle, hiperbolik diskte argüman için ihtiyaç duyulan dikdörtgenler mevcut değildir.

Uzay nasıl eğrilebilir?

Matematikteki (ve fizikteki) en paradoksal görünen deyimlerden biri 'eğri uzay'dır. Eğriliğin bir doğru ya da yüzey için ne anlama geldiğini hepimiz biliyoruz, fakat uzayın kendisi zaten öyledir. Üç boyutlu eğrilik düşüncesini bir ölçüde anlasak bile, eğri bir yüzeyle kurulan benzerlik, dördüncü boyuta geçmememiz durumunda uzayın eğri olup olmadığını göremeyeceğimizi ifade etmektedir. Belki de o zaman evrenin, dört boyutlu kürenin (V. Bölüm'de açıkladığım kavram) en azından eğri *gibi görünen* üç boyutlu yüzeyi olduğunu keşfetmemiz gerekecektir.

Elbette, bu tümüyle olanaksızdır. Evren dışında nasıl duracağımızı bilmediğimiz için –bu düşünce deyimlerde neredeyse bir çelişki oluşturmaktadır– kullanabileceğimiz tek kanıt onun içinden gelir. Öyleyse, uzayın eğri olduğuna bizi ikna eden hangi kanıttır?

Yine, bir kez daha, soyut bir yaklaşım benimsendiğinde soru kolaylaşmaktadır. Eğri uzayın gerçek doğasını kavramaya çalışırken olağanüstü zihinsel egzersizlere girişmek yerine, matematiksel kavramları genelleştirmede kullanılan alışılmış prosedürü izleyelim. İki boyutlu yüzeylere uygulandığında 'eğri' sözcüğünü anlıyoruz. Bunu tanıdık olmayan bir bağlamda, yani üç boyutlu durumda kullanabilmek için, tıpkı $2^{3/2}$, beş boyutlu küpler ya da Koch kar

tanesinin boyutunu tanımlarken yaptığımız gibi, kolay bir şekilde genelleştirilebilecek, eğri yüzeylere ilişkin *özellikleri* bulmamız gerekmektedir. Sonunda elde etmek istediğimiz özellik uzay *içinde* belirlenebilecek bir özellik olduğundan, bir yüzeyin eğriliğinin belirlenmesinde, bunun dışında durmaya dayanmayan yolları ele almamız gerekmektedir.

Örneğin, yeryüzünün yüzeyinin eğri olduğu konusunda kendimizi nasıl ikna edebiliriz? Bunun bir yolu, bir uzay mekiğiyle gökyüzüne gitmek, aşağı bakmak ve yeryüzünün yaklaşık olarak eğri olduğunu görmektir. Ancak, çok daha iki boyutlu olan aşağıdaki deney de çok ikna edici olacaktır. Kuzey Kutbu'ndan başlayın ve ilk yönünüzü işaretleyerek güneye yaklaşık 10.000 km. gidin. Sonra solunuza dönün ve aynı mesafeyi tekrar kat edin. Bundan sonra solunuza dönün ve aynı mesafeyi bir kez daha kat edin. 10.000 km. yaklaşık olarak Kuzey Kutbu'ndan ekvatora olan uzaklıktır, bu nedenle yolculuğunuz sizi Kuzey Kutbu'ndan ekvatora kadar, ekvatorun çevresinin dörtte biri kadar ve tekrar kuzey Kutbu'na götürmüştür. Bundan başka, geriye dönüş yönünüz başlama yönünüzle dik açılıdır. Buradan, yeryüzünde tüm açılarının toplamı dik açı olan bir eşkenar üçgen olduğu sonucu çıkar. Düz bir yüzeyde bir eşkenar üçgenin açılarının 60 derece olması gerekir, dolayısıyla yeryüzü düz değildir.

Böylece, iki boyutlu yüzeyin, o yüzey içinde eğri olduğunu göstermenin bir yolu, açılarının toplamı 180 derece olmayan bir üçgen bulmaktır ve bu da aynı şekilde üç boyutlularda da denenmesi gereken bir şeydir. Bu bölümde iki boyutlu Eukleides geometrisi, küresel geometri ve hiperbolik geometri üzerinde yoğunlaştım, fakat bunlar

oldukça kolay bir şekilde üç boyutluya genelleştirilebilir. Uzayda üçgenlerin açılarını ölçer ve bunların toplamının 180 dereceden fazla olduğunu görürsek, o zaman bu bize üç Kartezyen koordinatla tanımlanabilen türde bir uzaydan daha çok bir kürenin yüzeyinin üç boyutlu versiyonu olduğunu söyleyecektir.

Bu gerçekleşirse, uzayın pozitif olarak eğrildiğini söylemek akla yatkın olacaktır. Bu türde bir uzaydan beklenebilecek bir diğer özellik, aynı yönde başlayan doğruların yakınlaşacakları ve sonunda kesişecekleridir. Bir başka özellik, yarıçapı r olan bir dairenin çevresinin $2\pi d$ değil, biraz daha küçük bir sayı olmasıdır.

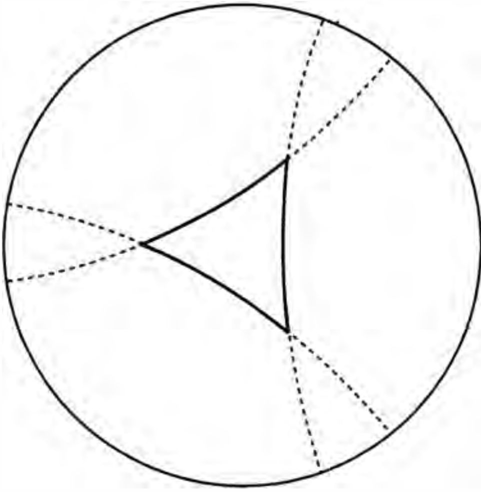
Bildiğimiz biçimiyle uzayın bu özelliklere sahip olmadığına işaret etmek isteyebilirsiniz. Aynı yönde başlayan doğrular aynı yönde devam ederler ve üçgenlerin açıları ve dairelerin çevreleri olması gerektiği gibidir. Diğer bir deyişle, uzayın eğri olması mantıksal olarak mümkün olmakla birlikte, aslında düzdür. Bununla birlikte, uzay, tıpkı yeryüzünün çok uzağa seyahat etmemiş olan biri için düz ya da daha doğrusu çeşitli büyüklüklerde çıkıntılarla düz görünmesi gibi, onun yalnızca küçük bir bölümünde yaşadığımız için düz görünebilir.

Diğer bir deyişle, uzay yalnızca *kabaca* düz olabilir. Belki de çok büyük bir üçgen oluşturabilsek, bunun açılarının toplamının 180 derece olmadığını görürüz. Bu, Gauss'un yapmaya çalıştığı şeydi, fakat onun üçgeni hiç de yeterince büyük değildi. Ancak, 1919'da tüm zamanların en ünlü deneylerinden biri, eğri uzay düşüncesinin yalnızca matematikçilerin bir fantezisi olmadığını, yaşamın bir gerçeği olduğunu gösterdi. Dört yıl önce yayınlanmış olan,

Einstein'ın genel görelilik kuramına göre, uzay yerçekimi tarafından eğriltilmiştir ve bu yüzden de ışık, en azından Eukleides'in bu deyimi anladığı biçimiyle, her zaman bir doğru içinde hareket etmez. Bu etki kolayca belirlenecek kadar çok küçük bir etki değildir, fakat 1919'da Gine Körfezi'nden görülebilen tam güneş tutulmasıyla böyle bir fırsat ortaya çıkmıştır. Bu gerçekleşirken, fizikçi Arthur Eddington güneşin hemen yanındaki yıldızların, Einstein'ın teorisinin kesinlikle tahmin ettiği şekilde, tam da tahmin edildikleri yerlerinde olmadıklarını gösteren bir fotoğraf çekmiştir.

Bugün uzayın (ya da daha kesin olarak uzay zamanının) eğri olduğu kabul edilmekle birlikte, yeryüzündeki dağlar ve vadiler gibi gözlemlediğimiz eğrilik çok daha simetrik bir şeklin yalnızca küçük bir düzensizi olabilir. Astronomideki en büyük ve yanıtlanmamış sorulardan biri, evrenin *büyük-ölçekli* şeklinin, yıldızlardan, kara deliklerden kaynaklanan eğrilerin düzeltilmesinden sonra alacağı şeklin belirlenmesidir. Acaba yine büyük bir küre gibi eğri mi olacaktır, yoksa insanın daha doğal, fakat kafasında büyük ihtimalle yanlış biçimde canlandırdığı gibi düz mü olacaktır?

Üçüncü bir olasılık evrenin *negatif* eğriliğe sahip olmasıdır. Bu, hiç de şaşırtıcı olmayan bir şekilde pozitif eğriliğin az ya da çok tersidir. Bu nedenle, negatif eğriliğin kanıtı üçgenin açılarının toplamının 180 dereceden az olması, aynı yönde başlayan doğruların uzaksama eğilimi göstermesi ya da yarıçapı r olan bir dairenin çevresinin $2\pi r$'den *büyük* olmasıdır. Bu davranış hiperbolik diskte gerçekleşir. Örneğin, Şekil 37, açılarının toplamı 180'den çok daha az



37. Hiperbolik üçgen.

olan bir üçgeni göstermektedir. Küre ve hiperbolik diski çok boyutlu benzerlerine genelleştirmek zor değildir, fakat hiperbolik geometri uzay zamanın büyük ölçekli şekli için hem küresel geometriden hem de Eukleides geometrisinden daha iyi bir model olabilir.

Manifoldlar

Kapalı bir yüzey, sınırı olmayan iki boyutlu şekildir. Bir tor (yassı halkanın ya da daire şeklindeki yuvarlak simidin yüzeyinin matematiksel adı) gibi, kürenin yüzeyi de buna iyi bir örnektir. Eğriliğe ilişkin tartışmanın açıklığa kavuş-

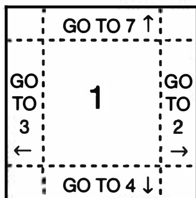
turduğu gibi, bu tür yüzeylerin içinde yaşadıkları üç boyutlu uzaya gönderme yapmadan bunlar hakkında düşünmek yararlıdır ve kapalı yüzeyi daha yüksek boyutlular için genelleştirmek istediğimizde bu daha da önem kazanır.

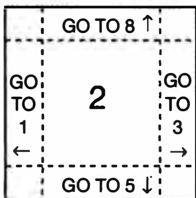
Yüzeylere ilişkin olarak salt iki boyutlu düşünmek isteyenler yalnızca matematikçiler değildir. Örneğin, ABD'nin geometrisi yeryüzünün eğriliğinden önemli ölçüde etkilenir, fakat yararlı bir yol haritası hazırlamak isterseniz, bunun tek bir büyük eğri kağıda basılmaması gerekmektedir. Çok daha pratik olanı, her biri ülkenin küçük bir bölümünü ele alan ve birkaç sayfadan oluşan bir kitap hazırlamaktır. Bu parçaların birbiriyle üst üste çakışması en uygunudur, böylece bir kasaba uygun olmayan bir şekilde sayfanın birinin kenarına yakın bir yerde yer alıyorsa, bir başka sayfada bu durumda olmayacaktır. Bundan başka, her sayfanın kenarında üst üste çakışan bölgelerin hangi sayfalarda olduğuna ve çakışmanın nasıl işlediğine ilişkin bir işaret olacaktır. Yeryüzünün eğriliğinden dolayı hiçbir sayfa tam olarak doğru olmayacaktır, fakat küçük çarpıtmaları belirtmek için sabit enlem çizgileri konulabilir ve bu yolla ABD'nin geometrisi düz sayfalardan oluşan bir kitapta kapsanabilir.

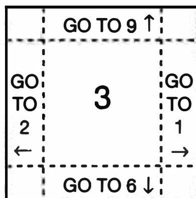
İlke olarak tüm dünyayı benzer ayrıntı düzeyinde (birçok sayfa hemen tümüyle mayi olmakla birlikte) kapsayan bir atlasın hazırlanmasında hiçbir engel bulunmamaktadır. Bu yüzden, kürenin matematiksel özellikleri bir atlasta kapsanabilir. Küreye ilişkin geometrik soruları yanıtlamak isterseniz ve onu hiç göz önüne getiremiyorsanız, fakat elinizde kullanışlı bir atlas bulunuyorsa, biraz çaba harcayarak bunu yapabilirsiniz. Şekil 38 bir kürenin değil, bir

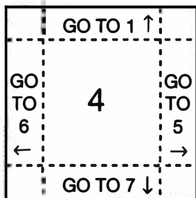
torun dokuz sayfalık bir atlasını göstermektedir. Bunun bir simit biçimine nasıl karşılık geldiğini görmek için büyük bir sayfa elde etmek üzere sayfaları yapıştırdığınızı ve sonra bir silindir oluşturmak için büyük sayfanın üstünü ve altını birleştirdiğinizi ve son olarak silindirin iki ucunu bir araya getirerek birleştirdiğinizi düşünün.

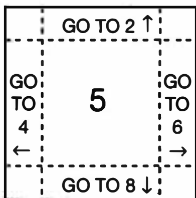
Matematiğin en önemli dallarından biri manifoldlar olarak bilinen nesnelerin incelenmesidir ve bu da düşün-

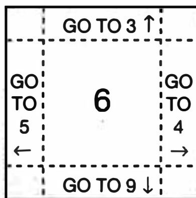


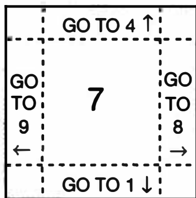


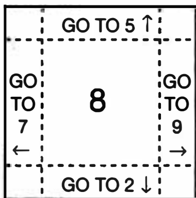


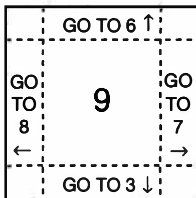












38. Bir tor atlası.

celerin üç ya da daha yüksek boyutlulara genelleştirilmesinden ortaya çıkar. Kabaca söylemek gerekirse, d-boyutlu bir manifold, her noktası d-boyutlu uzayın küçük bir parçasına çok benzeyen bir bölge tarafından etrafı çevrilmiş bir geometrik nesnedir. Boyut sayısı arttıkça manifoldları göz önüne getirmek çok daha güçleştiğinden, atlas düşüncesi buna karşılık çok yararlı hale gelmektedir.

Bir an için üç boyutlu bir manifoldun atlasının nasıl olacağını düşünelim. Elbette sayfaların üç boyutlu olması gerekecektir ve tıpkı bir yol haritasının sayfaları gibi bunlar da düz olacaktır. Bununla bildiğimiz Eukleides uzayının büyük parçaları olacağını anlatmak istiyorum; bunların küpler olması istenebilir, fakat bu matematiksel açıdan önemli değildir. Bu üç boyutlu 'sayfalar'ın her biri manifoldun küçük bir bölümünün haritası olacaktır ve bu sayfaların nasıl çakıştıkları dikkatli bir şekilde belirtilebilir. Tipik bir belirtme şu şekilde olabilir: A sayfasının belli bir kenarına uzanan (x, y, z) noktası, B sayfasındaki (2y, x, z-4) noktasına karşılık gelmektedir.

Böyle bir atlas verildiğinde, manifold boyunca hareket nasıl göz önüne getirilebilir? Bunun belirgin yolu, sayfaların birinde hareket eden bir noktayı düşünmektir. Bu nokta sayfanın kenarına ulaşırsa, manifoldun aynı bölümünün temsil edildiği, fakat noktanın tam kenarda olmadığı bir başka sayfa olacaktır, bu yüzden, bunun yerine o sayfaya geçilebilecektir. Böylece, manifoldun tüm geometrisi bir atlas olarak formüle edilebilir, bu nedenle manifoldu 'aslında' dört boyutlu uzayda bulunan bir üç boyutlu yüzey olarak düşünmeye gerek yoktur. Aslında, bazı üç boyutlu manifoldların dört boyuta sığdırılması bile mümkün değildir.

Bu atlas düşüncesi doğal olarak bazı soruları ortaya çıkarmaktadır. Örneğin, manifoldun etrafında hareket ettikçe ne olacağını ifade etmemizi sağlamakta birlikte, sayfaların nasıl çakıştıklarına ilişkin çok karmaşık kuralları olan çok sayıda sayfada kapsanmış bu bilgiden manifoldun temel 'şekli'ne ilişkin bir izlenime nasıl geçebiliriz? İki farklı atlasın aslında aynı manifoldun atlasları olduğunu nasıl söyleyebiliriz? Özellikle, üç boyutlu bir atlasa bakarak, bunun temsil ettiği manifoldun dört boyutlu bir kürenin üç boyutlu yüzeyi olup olmadığını söylemenin kolay bir yolu var mıdır? Poincaré kestirimi olarak bilinen bu son sorunun daha kesin bir formülasyonu, çözümü için bir milyon dolar ödül verileceği (Clay Matematik Enstitüsü tarafından) açıklanan, yanıtı bulunmamış bir sorudur.

VII. Bölüm

TAHMİNLER VE YAKLAŞIK HESAPLAMALAR

Birçok insan matematiğin çok açık, kesin bir bilim olduğunu düşünür. Okulda bir matematiksel problemin kısa ve özlü biçimde ifade edilmesi durumunda, buna genellikle basit bir formülle elde edilen, muhtemelen kısa bir yanıt verilebileceğini düşünürüz. Üniversitede matematiğe devam edenler ve özellikle de bu alanda araştırma yapanlar kısa süre içinde gerçeklerden bu kadar uzak bir şey olamayacağını keşfederler. Birçok problemde çözüm için kesin bir formülün bulunması mucizevi ve tümüyle beklenmeyen bir şey olacaktır; çoğu zaman bunun yerine kaba bir tahminle yetinmek gerekecektir. Bu kaba tahminlere alışıncaya kadar bunlar çirkin ve tatmin edici olmaktan uzak görülecektir. Ancak, bunları bir kez tatmakta yarar vardır, çünkü bunu yapmamak matematikteki en büyük teoremlerin ve çözülmemiş problemlerin en ilginçlerinin birçoğunu kaçırmak demektir.

Basit bir formülle verilmeyen basit bir dizi

a_1, a_2, a_3… aşağıdaki kurala göre oluşturulmuş gerçek sayılar olsun. Birinci sayı olan a_1 1'e eşittir ve bundan sonra gelen her sayı önceki sayı ile onun karekökünün toplamına eşittir. Diğer bir deyişle, her n için $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$ olsun. Bu basitçe ifade edilmiş kural açık bir soruyu ortaya çıkarır: a_n sayısı nedir?

Soruya ilişkin bir fikir edinmek üzere a_n'yi n'nin küçük değerleri için oluşturalım. $a_2 = 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$'dir. O zaman:

$$a_3 = a_2 + \sqrt{a_2} = 2 + \sqrt{2}$$
$$a_4 = a_3 + \sqrt{a_3} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$
$$a_5 = a_4 + \sqrt{a_4} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Bu böyle devam eder. Sağ taraftaki ifadelerin basitleştirilmesinin bile mümkün olmadığına ve her yeni sayının bir öncekinin iki katı uzunlukta olduğuna dikkat ediniz. Bu gözlemden a_{12} ifadesinin 2 sayısının 1024 defa yer aldığı bir ifade olacağı ve bunlardan birçoğunun karekök işareti ormanının iyice içlerinde bulunacağı sonucu çıkar. Bu türden bir ifade bize a_{12}'ye ilişkin çok fazla bir fikir vermeyecektir.

Bu yüzden diziyi anlama çabamıza son mu vermeliyiz? Hayır, çünkü n'nin çok küçük olduğu durumlar dışında, a_n'nin *kesin* değerine ilişkin iyi bir düşünme yolu ortada görünmemekle birlikte, bu iyi bir tahmin elde etme olanağını bir kenara bırakmaz. Aslında, iyi bir tahmin sonuçta daha yararlı olabilir. Yukarıda, a_5'in tam doğru bir ifadesini yaz-

mıştım, fakat bu, a_5'in yaklaşık olarak yedi buçuk olduğu bilgisinden daha iyisini sağlar mı?

Bu yüzden a_n'nin ne olduğu sorusunu sormayı bırakalım ve bunun yerine a_n'nin kabaca hangi büyüklükte olduğu sorusunu soralım. Diğer bir deyişle, a_n'ye ilişkin iyi bir yaklaşık değer veren basit bir formül bulmaya çalışalım. Böyle bir formülün mevcut olduğu ortaya çıkacaktır: a_n yaklaşık olarak $n^2/4$'tür. Bunu ayrıntılı olarak kanıtlamak zor bir iştir, fakat bunun niçin akla yatkın olduğunu görmek için şuna dikkat ediniz:

$$(n + 1)^2 /4 = (n^2 + 2n + 1) / 4 = n^2/ 4 + n /2 + 1/4$$
$$= n^2/4 + \sqrt{n^2 / 4} + 1/4.$$

Diğer bir deyişle, $b_n = n^2 / 4$ ise, $b_{n+1} = b_n + \sqrt{b_n} + 1 / 4$ olur. '$+ 1 / 4$' olmasaydı, bu bize oluşturulan b_n sayılarının tam olarak a_n gibi olacaklarını söyleyecektir. Ancak, n büyük olduğunda, $1 / 4$'ün eklenmesi 'yalnızca küçük bir düzensizlik'tir (kanıtlamanın bu bölümünü ele almıyorum), bu nedenle, b_n'ler *yaklaşık olarak* doğru biçimde oluşturulmuştur ve buradan b_n'nin, yani $n^2 / 4$'ün, öne sürdüğüm gibi, a_n'nin iyi bir yaklaşık değerini verdiği sonucu çıkar.

Yaklaşık değer elde etmenin yolları

Bu türden bir iddiada bulunurken iyi bir yaklaşık değerin ne olduğunun belirtilmesi önemlidir çünkü standartlar bağlamdan bağlama değişiklik gösterir. a_1, a_2,

a_3... gibi düzenli bir biçimde artan sayılar dizisini daha kolay tanımlanan b_1, b_2, b_3... dizisi ile yaklaşık olarak hesaplamaya çalışırken elde edilebilecek en iyi yaklaşık hesaplamanın yolu, ki bu çok ender durumda elde edilir, a_n ve b_n arasındaki farkı her zaman, örneğin 1000 gibi sabit bir sayının altında tutan yoldur. O zaman a_n ve b_n çok büyürse *oranları* 1'e çok yaklaşır. Örneğin, belli bir noktada a_n = 240859734863249875828 ve b_n = 240859734863249875973 4 olsun. Bu durumda $a_n - b_n$ = 906 ve bu oldukça büyük bir sayı olmakla birlikte, a_n ve b_n ile karşılaştırıldığında çok küçüktür. Eğer b_n , a_n'nin yaklaşık bir değeri ise, bu durumda a_n ve b_n'nin 'eklenen bir sabitle eşit' oldukları söylenebilir.

Bir diğer uygun yaklaşık hesaplama yolu, n arttıkça a_n ve b_n'nin oranlarının 1'e yakın olduğu yoldur. Bu a_n ve b_n'nin eklenen bir sabitle eşitlendiği durumda doğrudur, fakat aynı zamanda diğer durumlarda da doğrudur. Örneğin, eğer $a_n = n^2$ ve $b_n = n^2 + 3n$ ise, o zaman a_n ve b_n *farkı* büyük bir değer olan 3n olmakla birlikte, a_n / b_n oranı 1 + 3/n'dir ve n büyük olduğunda bu oran 1'e yakındır.

Genellikle bu bile çok fazla bir umut olabilir ve daha zayıf yaklaşık değer düşüncesi bile insanı mutlu edebilir. Genel bir düşünce 'belli bir çarpma sabit kadar eşit olduklarında' a_n ve b_n'yi yaklaşık olarak eşit kabul etmektir. Bu, ne a_n / b_n'nin ne de b_n / a_n'nin belli bir sabit sayıyı –yine 1000 gibi bir sayı olabilir ama ne kadar küçük olursa o kadar iyidir– aşabilecek olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle, belli sınırlar arasında tutulması gereken a_n ve b_n farkı değil, fakat bunların birbirine oranıdır.

Bir sayıyı onun 1000 katı büyük bir başka sayıyla yaklaşık aynı kabul etmek ters bir şey gibi görünmektedir. Fakat bu küçük sayılarla uğraşmaya alışık olmamızdan kaynaklanmaktadır. Elbette, hiç kimse 17'yi yaklaşık olarak 13.895'e eşit olarak görmeyecektir, fakat

2904756294089761562389545345987608890796872347514348757775468

ve

3609823459872097612349870982498634087623457796784587345987166464

genel anlamda büyük olarak aynı türdendir. İkincisi 1000 katından daha büyük olmakla birlikte, her ikisinin basamak sayısı yaklaşık olarak eşittir – 60 ve 65 arasında. Diğer ilginç özelliklerin olmaması durumunda, ilgileneceğimiz şey bu olabilir.

Bu ölçüde bir yaklaşık değer bulma bile çok şey istemek olduğunda, b_n'nin her zaman a_n'den daha küçük ve c_n'nin daha büyük olduğu $b_1, b_2, b_3\ldots$ ve $c_1, c_2, c_3\ldots$ gibi iki dizi bulmaya çalışmak yine de genellikle harcanan çabaya değer bir iştir. O zaman, b_n'nin a_n için 'alt sınır' olduğu ve c_n'nin 'üst sınır' olduğu söylenebilir. Örneğin, a_n gibi bir niceliği tahmin etmeye çalışan bir matematikçi, 'a_n'nin ne olduğunu yaklaşık olarak bile bilmiyorum, fakat en az $n^2 / 2$ olduğunu ve n^3'den büyük olmadığını kanıtlayabilirim' diyebilir. Eğer problem yeterince zor ise, bu türden bir teorem önemli bir başarı sayılabilir.

Logaritmalar, karekökler vb. hakkında bilmeniz gereken her şey

Matematikte yaygın olan tahminlerin ve yaklaşık değerlerin bu disiplin dışında iyi bilinmemesinin nedeni, kısmen, bunlar hakkında konuşabilmek için 'yaklaşık olarak log n kadar hızlı' ya da 'bir sabitin sınırları içinde t'nin karekökü' gibi deyimlerin çoğu insana pek anlam ifade etmemesidir. Neyse ki, yalnızca logaritmaların *yaklaşık* değerleri ya da büyük sayıların *yaklaşık* karekökleri ile ilgilenildiğinde, bunlar ve dolayısıyla bu türden bir dil çok kolay bir şekilde anlaşılabilir.

m ve n gibi büyük pozitif tamsayılar olduğunda ve mn çarpımının kaba ve kolay bir tahmini elde edilmek istendiğinde ne yapmanız gerekir? Uygun bir başlangıç m'nin rakamlarını ve n'nin rakamlarını saymaktır. m'nin h adet rakamı ve n'nin k adet rakamı olduğunda, m, 10^{h-1} ile 10^k arasında ve n ise 10^{k-1} ile 10^k arasında olur ve bu, mn'nin 10^{h+k-2} ile 10^{h+k} arasında olacağı anlamına gelir. Böylece, yalnızca m ve n rakamlarını sayarak mn'yi '100 faktörü sınırları içinde' belirleyebiliriz – yani, mn, 10^{h+k-2} ile 10^{h+k} arasında olmalıdır ve 10^{h+k}, 10^{h+k-2}'nin yalnızca 100 katı büyüklüğündedir. Eğer bir ödün vererek tahmininizde 10^{h+k-1}'i ararsanız, o zaman bu, mn'den en fazla 10 faktörü kadar farklı olacaktır.

Diğer bir deyişle, yalnızca 'belli bir çarpılan sabit kadar' farklı sayılarla ilgileniyorsanız, çarpma hemen çok kolay hale gelir: m ve n'yi alın, birleşmiş rakamlarını sayın, bundan 1'i çıkarın (eğer bu zahmete girerseniz) ve o kadar rakamı olan bir sayıyı yazın. Örneğin, 1293875 (7

rakamlı) ile 20986759777 sayılarının (11 rakamlı) çarpımı 10000000000000000 (17 rakamlı) civarındadır. Biraz daha titiz olmak isterseniz, birinci sayının 1 ve ikincisinin 2 ile başladığına dikkat ediniz. 20000000000000000 daha iyi bir tahmindir, fakat birçok amaç açısından bu ölçüde bir kesinlik gereksizdir.

Bazı yaklaşık çarpma işlemleri kolaydır ve bu nedenle karesinin yaklaşık olarak alınması da kolaydır; yapmanız gereken tek şey, sayınızı, rakamı iki katı olan yeni bir sayı ile değiştirmektir. Burada, n'nin rakamlarının *yarıya indirilmesi* n'nin karekökünü yaklaşık olarak verir. Aynı şekilde, rakamların 3'e bölünmesi küpkökü yaklaşık olarak verir. Daha genelde, n büyük bir tamsayı ve t herhangi bir pozitif sayı olduğunda, n' yaklaşık olarak n'nin t katı kadar rakama sahip olacaktır.

Logaritmalarda durum nasıldır? Yaklaşık değer bakış açısıyla bunlar da aslında çok basittir: bir sayının logaritması kabaca o sayının rakamları kadardır. Örneğin, 34587'nin ve 492348797548735'in logaritmaları yaklaşık olarak, sırasıyla 5 ve 15'tir.

Aslında, bir sayının rakamlarının sayılması, onun cep hesap makinenizde LOG tuşuna basarak elde edeceğiniz 10 tabanına göre logaritmasını yaklaşık olarak verir. Normalde, matematikçiler logaritmalardan söz ettiklerinde, 'doğal' logaritmalar adı verilen e tabanlı logaritmaları ifade ederler. e sayısı aslında çok doğal ve önemli olmakla birlikte, burada bilmemiz gereken tek şey, bir sayının, hesap makinesinde LN tuşuna basılarak elde edilecek doğal logaritmasının o sayının rakamlarının yaklaşık olarak 2,3 katı olduğudur. Bu nedenle, 2305799985748'in doğal lo-

garitması yaklaşık olarak 13 x 2,3 = 29,9'dur. (Logaritmalar hakkında bilgiye sahipseniz, aslında çarpmanız gerekenin log 10 olduğunu göreceksiniz.)

Bu süreç tersine çevrilebilir. Bir t sayınız olduğunu ve bunun bir diğer sayı olan n'nin doğal logaritması olduğunu varsayın. Bu n sayısı t'nin *üsteli* olarak adlandırılır ve e^t olarak yazılır. Bu durumda n kabaca ne olacaktır? Açıkçası, n'den t'ye gelebilmek için, n'nin rakamlarını sayar ve bunu 2,3 ile çarparız. Bu yüzden n'nin rakamları yaklaşık olarak t/2,3 olmalıdır. Bu, n'yi, en azından yaklaşık olarak belirler.

Vermiş olduğum yaklaşık değer tanımlarının temel kullanım alanı, bunların bize karşılaştırma yapma olanağı sağlamalarıdır. Örneğin, n gibi büyük bir sayının logaritmasının bu sayının küpkökünden çok daha küçük olacağı artık açıktır: n'nin rakamları 75 ise, o zaman küpkökü çok büyük olacaktır –yaklaşık olarak 25 rakamlı olacaktır– fakat doğal logaritması yalnızca yaklaşık olarak 75 x 2,3 = 172,5 olacaktır. Aynı şekilde, m sayısının üstü, m^{10} gibi bir kuvvetten çok daha büyük olacaktır: örneğin m'nin rakamları 50 ise, m^{10}'nin yaklaşık 500 rakamı olacaktır, fakat e^m'nin rakamları yaklaşık olarak m/2,3 olacaktır ve bu 500'den çok daha küçüktür.

Aşağıdaki tablo n = 941192 sayısına çeşitli işlemlerin uygulanmasının yaklaşık sonuçlarını göstermektedir. Burada e^n'yi dahil etmedim, çünkü bunu yapsaydım, bu kitabın adını değiştirmek zorunda kalırdım.

n	941192
n^2	885842380864

$\sqrt{n}$	970,15
$\sqrt[3]{n}$	98
$\log_e n$	13,755
$\log_{10} n$	5,974

Asal sayı teoremi

Asal sayı 1'den büyük olan ve 1 ve kendisi dışında başka hiçbir sayı ile bölünemeyen bir tamsayıdır. 150'den daha küçük olan asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 137, 139 ve 149'dur. 150'den daha küçük olan tüm diğer sayılar çarpanlarına ayrılabilir: örneğin, 91 = 7 x13. (Asal sayı tanımında 1'in görünürde keyfi olarak hariç tutulmasının nedenini merak edebilirsiniz. Bu, sayılara ilişkin anlaşılması güç bir gerçeği ifade etmemektedir: bu alışılmış, yararlı bir yoldan başka bir şey değildir ve verilen bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmanın bir yolu olarak kabul edilmiştir.)

Asal sayılar Yunanlardan bu yana matematikçileri düşkırıklığına uğratmıştır, çünkü bir ölçüde, fakat tümüyle olmamak üzere rassal olarak dağılmışlardır. Hiç kimse n. en büyük asal sayının ne olduğunu göstermenin basit bir yolunu bulamamıştır (elbette ilk n asal sayının listesi büyük bir çabayla yazılabilir, fakat bu pek de basit bir yol sayılmaz ve n büyük olduğunda tümüyle uygulanabilir olmaktan uzaktır) ve böyle bir yolun olması pek mümkün görünmemektedir. Öte yandan, ilk 35 asal sayının incelenmesi

bazı ilginç özellikleri ortaya koymaktadır. Birbirini izleyen asal sayıların farklarını hesapladığınızda şu yeni listeyi elde edersiniz: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6,8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2, 10. (Yani 1 = 3-2, 2 = 5 – 3, 2 = 7 – 5, 4 = 11 – 7 vb.) Bu liste yine de bir ölçüde düzensizdir, fakat buradaki sayıların bir eğilimi vardır, zorla ayırt edilebilir de olsa yavaş bir şekilde artmaktadırlar. Bunların düzenli şekilde artmadıkları açıktır, fakat 10 ve 1 gibi sayılar epey ilerlere kadar ortaya çıkmamaktadır, öte yandan ilk birkaç tanesi hep 4 ya da daha küçük sayılardır.

İlk bin asal sayıyı yazmak istediğinizde, birbirini izleyenler arasındaki farkların giderek artma eğilimi göstereceği daha belirgin hale gelecektir. Diğer bir deyişle, büyük asal sayılar, küçük olanlara göre daha seyrek görülür. Bunun böyle olacağı kesin olarak tahmin edilebilir, çünkü bir büyük sayının asal sayı *olamamasının* daha fazla yolu bulunmaktadır. Örneğin, 10.001 sayısının, özellikle de 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ya da 19 ile bölünemeyeceği için asal sayı olduğu düşünülebilir, fakat aslında bu 73 x 137'ye eşittir.

Öz saygısı olan hiçbir matematikçi, büyük asal sayıların küçük olanlara göre daha ender olduğu gözlemiyle tatmin olmayacaktır (uygun şekilde kanıtlansa bile). Bu sayıların *ne kadar* ender olduklarını bilmek isteyecektir. Rassal olarak 1.000.001 ve 1.010.000 arasında bir sayı seçerseniz, bunun bir asal sayı olma olasılığı nedir? Diğer bir deyişle, 1.000.000 civarındaki asal sayıların 'yoğunluğu' nedir? Olağanüstü derecede az mı yoksa yalnızca oldukça az mı?

Bu türden soruların üniversite düzeyinde matematikle karşılaşmış kişilerce ender olarak sorulmasının nedeni, bu kişilerin bunları formüle etmede ve düşünmede kullana-

cakları dilden yoksun olmalarıdır. Ancak, bu bölümü buraya kadar anladıysanız, matematiğin en önemli başarılarından birini değerlendirecek konumda bulunuyorsunuz: asal sayı teoremi. Bu, n sayısı civarındaki asal sayı yoğunluğunun yaklaşık olarak $1/\log_e n$, yani bir bölü n'nin doğal logaritması olduğunu ifade etmektedir.

Yine 1.000.001 ve 1.010.000 arasında rassal olarak seçilecek bir sayının asal sayı olma olasılığını ele alalım. Bu aralıktaki sayıların hepsi de kabaca bir milyondur. Asal sayı teoremi, yoğunluğun yaklaşık olarak 1'in bir milyonun doğal logaritması ile bölümü olacağını söyler. 10 tabanına göre logaritması 6'dır (bu örnekte, rakamların sayılması 7'yi verir, fakat biz kesin cevabı bildiğimiz için onu kullanabiliriz, bu nedenle doğal logaritma 6 x 2,3 ya da 13,8'dir). Dolayısıyla, 1.000.001 ve 1.010.000 arasındaki 14 sayıdan biri ya da bunların % 7'si asal sayıdır. Buna karşılık, 100'den daha küçük olan asal sayıların sayısı 24'tür, yani toplamın dörtte biridir ve bu da sayılar büyüdükçe yoğunluğun nasıl azaldığını göstermektedir.

Asal sayıların ara sıra ortaya çıkma, rassal olma gibi özellikleri olduğu için, bunlara ilişkin ne kadar kanıtlama yapılabileceğini görmek oldukça şaşırtıcıdır. Ne ilginçtir ki, asal sayılara ilişkin teoremler genellikle bu görünürdeki rassallıktan *yararlanılarak* kanıtlanmaktadır. Örneğin, 1937'de kanıtlanan ünlü Vinogradov teoremi, yeterince büyük her tek sayının üç asal sayının toplamı olarak yazılabileceğini ifade etmektedir. Bu kitapta bu matematikçinin bunu nasıl kanıtladığını açıklayamam, fakat yaptığı şey, tek sayıları üç asal sayının toplamı olarak ifade etmenin *yöntemini* bulmasıydı. Asal sayıların kendilerinin üretilme-

si bile zor olduğu için bu tür bir yaklaşımın başarısızlığa uğraması hemen hemen kesindir. Bunun yerine, Hardy ve Littlewood'un çalışmalarından yararlanarak kabaca şunu öne sürmüştür. Asal sayılarla yaklaşık aynı yoğunluğa sahip gerçekten rassal bir asal sayı dizisini alırsanız, temel olasılık teorisi, yeterince büyük tüm sayıları, hemen hemen kesinlikle dizinizdeki üç sayının toplamı olarak yazabileceğinizi gösterir. Aslında, bunu birçok farklı şekilde yapabilirsiniz. Asal sayılar rassala yakın oldukları için (kanıtlamanın zor olan tarafı, bunun ne anlama geldiğini anlatmak ve sonra bunu ayrıntılı olarak kanıtlamaktır), bunların davranışı rassal dizinin davranışına benzer ve böylece yeterince büyük tüm sayılar, yine birçok şekilde, üç asal sayının toplamıdır. Bu olguyu göstermek için, 35'i üç asal sayının toplamı olarak yazmanın tüm yolları şöyledir:

$$
\begin{aligned}
35 &= 2 + 2 + 31 = 3 + 3 + 29 = 3 + 13 + 19 = 5 + 7 + 23 \\
&= 5 + 11 + 19 = 5 + 13 + 17 = 7 + 11 + 17 = 11 + 11 + 13.
\end{aligned}
$$

Asal sayılara ilişkin araştırmaların büyük bölümü bu türdendir. Önce asal sayılar için bir olasılıklı model geliştirirsiniz – yani, bu sayıları bir rassal prosedüre göre seçmiş gibi yaparsınız. Sonra, asal sayılar gerçekten rassal olarak oluşturulduklarında neyin doğru olacağını belirlersiniz. Bu size birçok sorunun yanıtını tahmin etme olanağı sağlar. Son olarak, modelin, tahminlerinizin yaklaşık olarak doğru olması için yeterince gerçekçi olduğunu göstermeye çalışırsınız. Argümanın her aşamasında kesin yanıtlar vermek zorunda kalmanız durumunda bu tür bir yaklaşımın mümkün olamayacağına dikkat ediniz.

Olasılık modelinin fiziksel olgunun değil, matematiğin bir başka bölümünün modeli olması ilginçtir. Asal sayılar kesin biçimde belirlenmiş olmakla birlikte, her nasılsa deneysel veriler gibiymiş gibi bir his uyandırırlar. Onları bu şekilde ele alınca, belli olasılık sorularına yanıtların ne olabileceğini tahmin etmemizi sağlayan basitleştirilmiş modelleri geliştirme isteği uyandırırlar. Aslında bu tür modeller bazen insanları asal sayılar için geçerli kanıtlara yöneltirler.

Bu argüman tarzı bazı dikkate değer başarılar sağlamış olsa da, birçok ünlü problemi çözülemeden bırakmıştır. Örneğin, Goldbach'ın tahmini 4'ten büyük olan her çift sayının iki asal sayının toplamı olduğunu iddia etmektedir. Bu tahmin, Vinogradov tarafından yanıtlanan üç asal sayılı probleme göre çok daha zor gibi görünmektedir. Ayrıca, 17 ve 18 ya da 137 ve 139 gibi 2 ile ayrılmış sonsuz sayıda asal sayı çifti olduğunu öne süren iki asal sayılı tahmin de bulunmaktadır. Bunu ifade etmenin bir diğer yolu, yukarıda benim yapmış olduğum gibi, birbirini izleyen sayıların farklarını yazdığınızda, 2 sayısının (giderek daha seyrek olmakla birlikte) hep ortaya çıkacağıdır.

Belki de matematikteki çözülemeyen en ünlü soru Riemann hipotezidir. Bunun birkaç eşdeğer formülasyonu mevcuttur. Bunlardan biri asal sayı teoremi tarafından sağlanan tahminin kesinliğiyle ilişkilidir. Daha önce söylemiş olduğum gibi, asal sayı teoremi, asal sayıların belli bir sayı civarındaki yaklaşık yoğunluğunu bize vermektedir. Bu bilgiden belli bir n sayısına kadar kaç tane asal sayı olduğu kabaca hesaplanabilir. Fakat kabaca ne kadar kabacadır? n'ye kadar olan asal sayıların gerçek sayısı p(n)

olduğunda ve q(n) asal sayı teoremi tarafından sağlanan tahmin olduğunda, Riemann hipotezi p(n) ve q(n) arasındaki farkın $\sqrt{n}$ 'den çok fazla olmayacağını öne sürmektedir. Bu türden bir kesinliğin geçerli olduğu kanıtlanırsa, bunun birçok uygulaması olacaktır, fakat bugüne kadar bilinenler çok daha zayıf durumdadır.

Algoritmaların sıralanması

Matematiğin kaba tahminlerle dolu bir başka dalı teorik bilgisayar bilimidir. Belli bir işi yapmak için bir bilgisayar programı yazıyorsanız, bunu mümkün olduğu kadar hızlı işleyecek şekilde tasarlamanız iyi bir fikirdir. Teorik bilgisayar bilimcileri şu soruyu sorarlar: en hızlı olması beklenen hangisidir?

Bu soruya kesin bir yanıt bulunmasını istemek hemen her zaman gerçekçilikten uzaktır, bu yüzden, 'aşağıdaki algoritma, girdi sayısı n olduğunda yaklaşık n^2 kadar adımda işler' türünden ifadeler kanıtlanmaya çalışılır. Buradan tipik bir PC'nin 1.000 büyüklüğünde girdiyi (kabaca söylemek gerekirse, analiz etmesini istediğiniz bilgi miktarı) işleyebileceği, fakat 1.000.000 büyüklüğünde girdiyi işleyemeyeceği sonucuna varılabilir. Bu nedenle, bu türden tahminlerin pratik önemi vardır.

Bilgisayarların yaptığı bilinen en yararlı işlerden biri sıralamadır – yani, çok sayıda nesneyi belli bir ölçüte göre sıralama. Buna ilişkin bir fikir sahibi olmak için, tercihe göre sıralanmış bir nesne toplamını (bunların cansız nesneler olması gerekmez, örneğin, bir iş için başvuran adaylar ola-

bilir) düzenlemek istediğinizi düşünelim. Belli bir nesneyi ne kadar sevdiğinize ilişkin sayısal bir değer veremediğinizi varsayalım, fakat iki nesne verildiğinde bunlardan hangisini tercih ettiğinize her zaman karar verebilirsiniz. Ayrıca, B'ye karşı A'yı, C'ye karşı B'yi ve A'ya karşı C'yi hiç tercih etmeyeceğiniz anlamında, tercihlerinizin tutarlı olduğunu da varsayalım. Bu iş üzerinde uzun süre çalışmak istemiyorsanız, yapacağınız karşılaştırma sayısını minimize etmek mantıklı olabilir.

Nesne sayısı çok az olduğunda bunu halletmek kolaydır. Örneğin, iki nesne varsa, en azından bir karşılaştırma yapmanız gerekir ve bunu yaptığınızda bunların sırasını bilirsiniz. A, B ve C gibi üç nesne olduğunda, bir karşılaştırma yeterli olmayacaktır, ancak bazı karşılaştırmalardan yola çıkmanız gerekir ve bunun hangisi olduğu önemli değildir. Örneğin, tartışmak için A ve B'yi karşılaştırdığınızı ve A'yı tercih ettiğinizi düşünelim. Şimdi de A ve B'den birini C ile karşılaştırmanız gerekir. A'yı C ile karşılaştırırsanız ve C'yi A'ya tercih ederseniz, o zaman tercih sıralamanızın C, A, B olduğunu bilirsiniz. Ancak, gerçekleşebileceği gibi, A'yı C'ye tercih ederseniz, o zaman B ve C hakkındaki tüm bilginiz, A'yı ikisinden birine tercih ettiğinizdir. Bu durumda, B ve C'yi sıralamak için üçüncü bir karşılaştırma yapılması gerekecektir. Bu yüzden, üç karşılaştırma her zaman yeterlidir ve bazen de gereklidir.

A, B, C ve D gibi dört nesne olduğunda ne olacaktır? Analiz daha karmaşık hale gelir. Yine, A'yı B ile karşılaştırarak işe başlayabilirsiniz. Fakat bunu yaptıktan sonra, bir sonraki karşılaştırma için iki farklı olasılık mevcuttur. Ya A ve B'den birini C ile karşılaştırabilirsiniz ya da C'yi D ile

karşılaştırabilirsiniz ve bunlardan hangisinin daha iyi bir fikir olduğu açık değildir.

Diyelim ki, B ve C'yi karşılaştırdınız. Şanslıysanız, A, B ve C'yi sıralamanız mümkündür. Bu sıralamanın A, B, C olduğunu varsayalım. O zaman D'nin nerede olacağını bulmak gerekir. İlk önce yapılacak en iyi iş D ile B'yi karşılaştırmaktır. Bundan sonra yapmanız gereken tek şey, D ile A'yı (eğer D'yi B'ye tercih etmişseniz) ya da C'yi (B'yi D'ye tercih etmişseniz) karşılaştırmaktır. Bu toplamda dört karşılaştırma eder – ikisi A, B ve C'yi sıralamak için ve ikisi D'nin nereye yerleştirileceğini belirlemek için.

Problemi analiz etmeyi bitirmedik, çünkü A, B ve C'de şanslı olmayabilirsiniz. İlk iki karşılaştırmadan sonra belki de bildiğiniz tek şey hem A hem de C'nin B'ye tercih edilebildiğidir. O zaman bir başka ikilem ortaya çıkar: A ile C'yi karşılaştırmak mı, yoksa D ile A, B ve C'den birini karşılaştırmak mı daha iyidir – ikinci durumda, D, B ile mi yoksa A ve B'den biri ile mi karşılaştırılmalıdır? Bu durumlara ve altdurumlara bakmayı bitirdikten sonra, yine de ikinci karşılaştırmanızın C ve D arasında olması halinde ne olacağını görmeniz gerekir.

Bu analiz bir ölçüde sıkıcı hale gelir, fakat yapılabilir. Beş karşılaştırmanın her zaman yeterli olacağını, bazen bu kadar karşılaştırmaya ihtiyaç olduğunu ve ikinci karşılaştırmanın aslında C ve D arasında olması gerektiğini gösterir.

Bu türden bir argümana ilişkin sorun, ele alınması gereken durum sayısının çok hızlı bir şekilde çok artmasıdır. Örneğin, 100 nesne olduğunda kesin olarak kaç karşılaştırma yapılması gerektiğini hesaplamak olanaksızdır – bu-

nun hiçbir zaman bilinemeyeceği hemen hemen kesindir. (Bir matematikçinin belli bir miktarın kesin değerinin bilinemeyeceği biçimindeki açıklamasını ilk duyduğumda uğradığım şoku çok iyi hatırlıyorum. Şimdi bunun istisna olmaktan çok genel kural olmasına alışmış bulunuyorum.) Söz konusu miktar, n kişiden oluşan bir grupta diğer kişilerin her birini tanıyan kişilerin sayısının beş ya da diğerlerinin her biriyle yeni tanışan kişi sayısının beş olduğu en küçük n sayısını veren sayıdır, yani Ramsey sayısı R(5,5)'tir. Bu yüzden, kişi alt ve üst sınırları bulmaya çalışır. Bu problemde, üst sınır c_n'nin anlamı, c_n'den daha fazla karşılaştırma kullanan n nesneyi sıralamak için bir prosedür olmasıdır ve alt sınır b_n ise, ne kadar zeki olursanız olun, b_n kadar karşılaştırmanın bazen gerekli olduğuna ilişkin bir kanıtlamadır. Bu, iyi bilinen üst ve alt sınırların birbirinin çarpımı bir faktör sınırı içinde olduğu probleme bir örnektir; belli bir çarpılan sabite kadar n nesneyi sıralamak için gerekli olan karşılaştırma sayısının n log n olduğu bilinmektedir.

Bunun niçin ilginç olduğunu görmenin bir yolu, kendinizin bir sıralama prosedürü geliştirmesidir. Açık bir yöntem, üst gelen nesneyi bulmak, onu bir kenara ayırmak ve sonra bunu tekrarlamaktır. En uygun nesneyi bulmak için, ilk iki tanesini karşılaştırın, kazananı üçüncü ile karşılaştırın, burada kazananı dördüncü ile karşılaştırın ve bunu bu şekilde tekrarlayın. Bu yolla en uygunu bulmak için n – 1 karşılaştırma, ikinci en uygun için n – 2 yapmak gerekir, bu böyle sürüp gider. Sonuçta toplamda (n – 1) + (n – 2) + (n – 3) +...+1 karşılaştırma gerekir ve bu yaklaşık olarak n^2 / 2'dir.

Bu yöntemi kullandığınızda, ne kadar doğal görünse de, sonuçta her nesne çifti karşılaştırılmış olur, bundan dolayı da aslında çok verimsizdir (bunun programlanmasının basit olması gibi bir avantaja sahip olsa bile). n büyük olduğunda, Quicksort olarak bilinen şu yöntem, daha hızlı sonuç vermesi garanti olmasa da, genellikle çok daha hızlı çalışır. Şöyle tekrarlayan biçimde (yani kendisi açısından) tanımlanır Önce nesnelerden birini, diyelim x'i seçin ve diğerlerini, x'ten daha iyi olanlar ve daha kötü olanlar biçiminde, iki yığın halinde düzenleyin. Bu n – 1 karşılaştırma yapmayı gerektirir. Şimdi, yapmanız gereken şey, Quicksort'u kullanarak iki yığını sıralamanızdır. Yani, her yığında bir nesneyi seçin ve diğerlerini yine iki yığın halinde düzenleyin ve bunu böyle sürdürün. Genellikle, şanssız değilseniz, bir yığını iki başka yığına ayırdığınızda, bunlar yaklaşık olarak aynı büyüklükte olacaktır. Yapacağınız karşılaştırmaların sayısının yaklaşık olarak n log n olacağı gösterilebilir. Diğer bir deyişle, bu yöntem tahmin edebileceğiniz en iyi biçimde, bir çarpılan faktör sınırları içinde işler.

VIII. Bölüm

SIK SORULAN BAZI SORULAR

1. Matematikçilerin 30 yaşında başarıya ulaştıkları doğru mudur?

Yaygın biçimde inanılan bu mit, matematiksel yeteneğin doğasına ilişkin yanlış bir düşünceden kaynaklanmaktadır. İnsanlar matematikçileri dâhi olarak, dehayı da birkaç kişinin doğuştan sahip olduğu ve başka hiç kimsenin elde edemeyeceği gizemli bir nitelik olarak düşünme eğilimindedirler.

Yaş ve matematiksel üretim arasındaki ilişki kişiden kişiye büyük değişkenlik gösterir ve birkaç matematikçinin 20'li yaşlarında en iyi çalışmalarını yaptıkları bir gerçektir. Ancak, büyük çoğunluk bilgilerinin ve ustalıklarının yaşamları boyunca geliştiğini ve bu gelişmenin 'ham' beyin gücündeki –bu kavramın bir anlamı varsa tabii– herhangi bir azalmanın çok daha fazlasını telafi ettiğini görürler. Yaşı 40'ı aşan matematikçiler tarafından gerçekleştirilen çığır açıcı başarı sayısının çok fazla olmadığı bir gerçek-

tir, fakat bu türden çığır açıcı br başarı sağlayabilen biri, muhtemelen daha önceki çalışmaları nedeniyle zaten iyi tanınmış durumda olacaktır ve bu yüzden de daha genç, daha az tanınan bir matematikçi kadar aç olmayacaktır. Ancak, bunun tersi birçok örnek bulunmaktadır ve bazı matematikçiler emeklilik yaşını iyice aştıktan sonra bile şevkleri azalmadan çalışmalarını sürdürürler.

Genelde, basmakalıp matematikçiye ilişkin yaygın görüş –belki çok zeki, fakat aynı zamanda tuhaf, kötü giyinmiş, aseksüel, yarı-otistik bir kişi– övücü bir görüş değildir. Birkaç matematikçi bu kalıba bir ölçüde uymakla birlikte, böyle olmamanız durumunda matematikte iyi olmayacağınızı düşünmekten daha aptalca bir şey olamaz. Aslında, diğer her şey aynı kaldığında, burada bir avantajınız olabilir. Matematik öğrencilerinin yalnızca çok küçük bir bölümü sonunda araştırmacı matematikçi olurlar. Çoğu, örneğin ilgilerini yitirerek, PhD öğrencisi olmayarak ya da PhD yaptıktan sonra üniversitede çalışmayarak erken aşamada bu işin dışına çıkarlar. İzlenimim odur ki, böyle düşünmekte yalnız değilim, çeşitli yollarla en iyilerinin ayrılması sürecini geçenler arasında genellikle başlangıçtaki öğrenci kitlesinden çok daha az oranda tuhaf insan bulunmaktadır.

Matematikçilerin olumsuz şekilde tasvir edilmesi, bu konudan keyif alacak ve bu alanda iyi şeyler yapacak insanları bu işten vazgeçirdiği için zarar verici olmakla birlikte, 'dâhi' sözcüğünün verdiği zarar daha sinsi ve belki de daha fazladır. Dâhinin kabaca ve kolay bir tanımı şöyledir: kolay bir şekilde ve genç bir yaşta, hemen hiç kimsenin, başarabilse bile ancak uzun yıllar çalışarak yapabileceği bazı şeyleri kolay bir şekilde yapabilen kişidir. Dâhilerin

başardıkları işlerde bu tür gizemli bir özellik vardır – sanki beyinleri bizimkinden daha etkin şekilde çalışmakla kalmamakta, fakat tümüyle farklı şekilde çalışmaktadır. Her yıl ya da her iki yılda bir Cambridge'e, onlara matematiği öğretmesi gerekenler dahil, çoğu insanın birkaç saatte ya da daha fazla sürede çözebildiği problemleri her zaman birkaç dakikada çözebilen bir matematik lisans öğrencisi gelir. Bu tür bir kişiyle karşılaşınca, yapılabilecek tek şey onun gerisinde durmak ve hayranlık beslemektir.

Ancak, yine de, bu olağanüstü kişiler en başarılı matematik araştırmacısı olmazlar. Diğer profesyonel matematikçilerin sizden önce denediği ve başarısızlığa uğradığı bir problemi çözmek isterseniz, sahip olmanız gereken birçok nitelik arasında benim tanımladığım biçimdeki özellikler ne gereklidir ne de yeterlidir. Buna aşırı bir örnek vermek gerekirse, Fermat'ın son teoremini kanıtlayan ve böylece dünyanın çözülemeyen en ünlü problemini (x, y, z ve n'nin hepsi pozitif tamsayı ve n 2'den büyük olduğunda, $x^n + y^n$'nin z^n'ye eşit olmayacağını ifade eden teorem) çözen Andrew Wiles (40 yaşını biraz geçmişken) kuşkusuz çok zekidir, fakat benim tanımladığım anlamda bir dâhi değildir.

Bunu bir tür gizemli zihinsel gücü olmadan nasıl yapabildi diye sorabilirsiniz? Onun başarısı olağanüstü olmakla birlikte, açıklanamayacak kadar olağanüstü değildir. Onun başarılı olmasını sağlayan şeyin ne olduğunu tam olarak bilmiyorum, fakat büyük cesarete, kararlılığa, sabra, diğerleri tarafından yapılmış bazı çok zor çalışmalara ilişkin geniş bir bilgiye, doğru matematiksel alanda doğru zamanda bulunma konusunda iyi bir talihe ve istisnai stratejik yeteneğe ihtiyacı olmalıdır.

Bu son özellik, sonuçta anormal bir zihinsel hızdan daha önemlidir: matematiğe yapılan en büyük katkılar genellikle tavşanlardan daha çok kaplumbağalar tarafından gerçekleştirilmiştir. Matematikçiler bu alanda geliştikçe, kısmen diğer matematikçilerin çalışmalarından, kısmen de matematik konusunda harcadıkları uzun saatlerin sonucunda zanaatın çeşitli incelik ve ustalıklarını öğrenirler. Dillere destan olmuş problemleri çözmede ustalıklarını kullanıp kullanamayacaklarını belirleyen şey, büyük ölçüde, dikkatli bir planlama sorunudur: sonuç alınması muhtemel problemlerin çözümüne girişmek, belli bir düşünce çizgisini ne zaman bırakacaklarını bilmek (bu verilmesi zor bir karardır), ara sıra ayrıntıları doldurmadan önce argümanın geniş anahatlarını ortaya koyabilmek. Bu, dehayla uyumsuz olmayan, ama her zaman ona eşlik etmeyen bir olgunluk düzeyini gerektirir.

2. Niçin bu kadar az sayıda kadın matematikçi var?

Bu soruyu geçiştirmek çekici gelir, çünkü bunun yanıtlanması saldırıya yol açabilecek iyi bir fırsat oluşturur. Bununla birlikte, dünyadaki matematik bölümlerinde bugün bile kadın matematikçi oranının düşük olması o kadar çok dikkati çekmektedir ve matematik yaşamının önemli bir olgusu haline gelmiştir ki, söyleyeceklerim bu durumu şaşırtıcı ve üzücü bulduğumdan fazla bir şey olmasa da, kendimi bir şeyler söylemek zorunda hissediyorum.

Belirtilmesi gereken bir nokta, matematikte kadınların azlığının bir başka istatistiksel olgu olmasıdır: çok iyi kadın matematikçiler mevcuttur ve bunlar erkek meslektaşları gibi, bazı durumlarda zeki olmak dahil, iyi matematikçi olmanın farklı yollarına sahiptirler. Matematikçilerin başarabileceklerinin üst sınırı olduğuna ilişkin herhangi bir kanıt bulunmamaktadır. Bazen erkeklerin zekâ testlerinde, örneğin uzaysal görme yeteneğinde daha başarılı olduklarına ilişkin haberler okuruz ve bazen de bunun onların matematikteki üstünlüklerinin nedeni olduğu öne sürülür. Ancak, bu türden bir argüman çok inandırıcı değildir: uzaysal görme yeteneği uygulamayla geliştirilebilir ve bazen matematikçiye yararlı olmakla birlikte, çok ender durumda vazgeçilmez bir yetenektir.

Daha akla yatkın bir düşünce sosyal faktörlerin önemli oluşudur: bir erkek çocuk matematiksel yeteneğinden gurur duyabilirken, bir kız çocuğunun kadına ait değilmiş gibi algılanan bir hedefte üstün olmaktan rahatsız olacağı düşünülebilir. Buna ek olarak, matematik yeteneği olan kızların çok az rol modelleri mevcuttur, bu yüzden de bu durum kendini kendini beslemektedir. Sonraki aşamalarda etkili olan bir sosyal faktöre gelince, matematik, diğer çoğu disiplinden daha fazla olmak üzere, annelikle birleşmesi imkânsız olmasa bile zor olan belli bir tek başına düşünmeyi gerektirir. Romancı Candia McWilliam bir zamanlar her çocuğun kendisine iki romana mal olduğunu söylemiştir: fakat en azından birkaç yıl roman yazmadıktan sonra bir roman yazmak mümkündür. Matematiği birkaç yıl bırakırsanız, alışkanlığınızı yitirirsiniz ve matematiksel geriye dönüşler enderdir.

Kadın matematikçilerin erkek meslektaşlarına göre daha geç geliştiği öne sürülmüştür ve bu durum erken başarıyı ödüllendiren bir mesleki yapıda onları dezavantajlı duruma sokar. Bu geç gelişim büyük ölçüde yukarıda belirtilen nedenlerden kaynaklansa da, çoğu ünlü kadın matematikçinin yaşam öyküleri bunu doğrulamaktadır ve burada da yine birçok istisna mevcuttur.

Ancak bu açıklamalardan hiçbiri yeterli değildir. Daha fazla spekülasyon yapmaktansa, bu noktada yapabileceğim en iyi şey, bu konu hakkında bazı kitapların yazılmış olduğuna işaret etmektir. Son bir nokta olarak bu durumun iyileştiği belirtilebilir: matematikçiler arasında kadınların oranı son yıllarda giderek artmıştır ve genelde toplumun ne kadar değiştiği ve değişmekte olduğu dikkate alındığında, bunun süreceği hemen hemen kesindir.

3. Matematik ve müzik birbiriyle uyumlu mudur?

Birçok matematikçinin müzikseverlikten tümüyle uzak olmasına ve çok az müzisyenin matematiğe ilgi duymasına rağmen, bu ikisinin bağlantılı olduğu konusunda halkta sürekli bir inanç vardır. Bunun sonucunda, bir matematikçinin çok iyi bir piyanist olduğunu ya da hobi olarak müzik bestelediğini ya da Bach dinlemeyi sevdiğini duyunca hiç kimse şaşırmaz.

Matematikçilerin diğer sanat dallarından daha fazla müziğe yöneldiklerini söyleyen anekdot biçiminde çok sayıda kanıt mevcuttur ve bazı araştırmalar müziksel açıdan

eğitilen çocukların bilimsel konularda daha üstün başarı sağladıklarını iddia etmiştir. Soyutlama sanatların tümünde önemli olmakla birlikte, müzik en soyut sanattır: müzik dinlemenin keyfinin büyük bölümü, içsel bir anlamı olmayan ve saf biçimlerin, tümüyle bilinçli olmasa bile, doğrudan değerlendirilmesi sonucunda ortaya çıkar.

Ne yazık ki, anekdot biçimindeki kanıtlar ciddi bilim tarafından çok az desteklenmektedir. Hangi soruların sorulması gerektiği bile açık değildir Benzer sosyal geçmişe ve eğitim geçmişine sahip matematikçi olmayanlarla karşılaştırıldığında, matematikçilerin yüksek bir oranının piyano çaldığını gösteren, istatistiksel açıdan anlamlı veriler toplanırsa bunlardan ne öğrenebiliriz? Benim tahminin, bu tür verilerin toplanmasının mümkün *olduğu*, fakat bu ilişkiyi açıklayan, deneysel olarak test edilebilen bir teorinin oluşturulmasının çok daha ilginç olacağıdır. İstatistiksel kanıtlar daha spesifik olursa, çok daha değerli olacaktır. Hem matematik hem de müzik çok çeşitlidir: duygusal olarak bazı bölümler konusunda hevesli olup diğerleri hakkında tümüyle ilgisiz olmak mümkündür. Matematik ve müzik zevkleri arasında ince bağlantılar var mıdır? Eğer varsa, bunlar bir bütün olarak disiplinlere dönük ilgi arasındaki kaba bağlantılardan çok daha fazla bilgi sağlayıcı olacaktır.

4. Niçin bu kadar çok kişi matematikten açık biçimde hoşlanmaz?

İnsanların biyolojiden ya da İngiliz edebiyatından hiç hoşlanmadıklarını söylediklerini pek işitmeyiz. Elbette, bu

konulardan herkes heyecan duymaz, fakat heyecan duymayanlar heyecan duyanların olduğunu çok iyi bilirler. Buna karşılık, matematik ve fizik gibi matematiksel içeriği yüklü olan bilimler yalnızca ilgisizlik değil, aslında antipati uyandırırlar. Birçok insanın matematik konularını mümkün olduğu kadar çabuk bırakmalarına ve yaşamlarının geri kalan bölümlerinde korku ile hatırlamalarına neden olan nedir?

Belki de insanların zevksiz buldukları şey, matematiğin kendisinden daha çok matematik dersleri deneyimidir ve bunun anlaşılması kolaydır. Matematik sürekli olarak kendi üzerine inşa ettiğinden, onu öğrenirken yakından izlemek önemlidir. Örneğin, iki rakamlı sayıların çarpımında makûl düzeyde usta değilseniz, muhtemelen dağılma özelliği konusunda (II. Bölüm'de tartışılmıştı) iyi bir sezgisel duygunuz olmayacaktır. Bu olmayınca, $(x + 2)$, $(x + 3)$ gibi ifadelerdeki parantezlerin çarpımı konusunda rahat olmamanız da mümkündür ve ikinci dereceden denklemleri iyi bir şekilde anlayamayacaksınız. İkinci dereceden denklemleri anlamazsanız, altın oranın niçin $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ biçiminde olduğunu da anlamayacaksınız. Bu türden birçok zincir mevcuttur, fakat matematiği sürdürmek yalnızca matematiğin teknik dilinde akıcılığı sürdürmekten daha önemlidir. Daha öncekilerden çok daha önemli ve dikkati çeken derecede daha karmaşık yeni bir fikir sık sık ortaya atılır ve bunlar diğerlerini geride bırakırlar. Buna açık bir örnek, birçoklarının aklını karıştıran, fakat matematikte belli bir düzeyden sonra önemli olan, sayılar yerine harflerin kullanılmasıdır. Diğer örnekler arasında negatif sayılar,

karmaşık sayılar, trigonometri, kuvvet alma, logaritmalar ve kalkülüse giriş bulunmaktadır. Bu düşüncelerden biri ile karşılaştığında gerekli kavramsal sıçramayı yapmaya hazır olmayanlar, bunun üzerine inşa edilen matematik konusunda kendilerini güvensiz hissedeceklerdir. Giderek matematik öğretmenlerinin anlattıklarının yalnızca yarısını anlamaya alışacaklar ve kaçırdıkları birkaç başka adımdan sonra yarısını bile anlamalarının aşırı bir tahmin olduğunu göreceklerdir. Bu arada, sınıfta diğerlerinin hiç güçlük çekmeden izlemeyi sürdürdüklerini göreceklerdir. Matematik derslerinin birçok kişi için bir çile haline gelmesi şaşırtıcı değildir.

Bunun böyle olması gerekir mi? Bazıları okulda matematikten nefret etmeye mahkûm mudur? Veya bu konunun çok daha az kişinin dışarıda kalmasını sağlayacak şekilde öğretilmesi mümkün olabilir mi? Matematikte erken yaşlardan başlayarak iyi ve istekli bir öğretmen tarafından bire bir eğitim sağlanan her çocuğun matematiği severek büyüyeceğinden eminim. Bu, elbette, mümkün bir eğitim politikasını ifade etmemektedir, fakat en azından matematiğin öğretilme yönteminde iyileştirmenin mümkün olabileceğine işaret etmektedir.

Bu kitapta vurguladığım düşüncelerden bir tavsiye çıkarılabilir. Yukarıda, tekniği akıcı biçimde kullanmakla zor kavramların anlaşılması arasındaki farkı dolaylı olarak ortaya koydum, fakat görünüşe göre bunlardan birinde iyi olan hemen herkes diğerinde de iyi olmaktadır. Aslında, bir matematiksel nesneyi anlamak, onun özünü kavramaktan daha çok, büyük ölçüde onun uyduğu kuralları öğrenmekse, beklememiz gereken şey de tamı tamına

budur – tekniği akıcı biçimde kullanmak ve matematiksel idrak arasındaki fark, düşünülenden daha az belirgindir.

Bu gözlem dershanedeki uygulamayı nasıl etkilemelidir? Herhangi bir devrimci değişiklik önermiyorum –matematik bu şekildeki çok sayıda öneriden zaten zarar görmüştür– fakat vurgulamadaki küçük bir değişiklik sonuç verebilir. Örneğin, bir öğrencinin $x^{a+b} = x^a + x^b$ olarak düşünerek genel bir yanlış yaptığını varsayalım. x^a gibi ifadelerin içerdiği anlamı vurgulayan bir öğretmen x^{a+b}'nin $a + b$ adet x'in birbiriyle çarpılması anlamına geldiğine ve bunun da açık biçimde bunlardan a kadarının birbiriyle çarpımının b kadar birbiriyle çarpımının çarpımıyla aynı olduğuna işaret edecektir. Ne yazık ki, birçok çocuk bu argümanı kavramayı çok karmaşık bulmakta ve a ve b'nin pozitif tamsayılar olmaması durumunda bu argüman geçerliliğini yitirmektedir.

Bu gibi çocuklar daha soyut bir yaklaşımdan yarar sağlayabilirler. II. Bölüm'de işaret ettiğim gibi, kuvvetler hakkında bilmemiz gereken her şey birkaç basit kuraldan elde edilebilir ve bunların en önemlisi $x^{a+b} = x^a x^b$'dir. Bu kural vurgulanırsa, yukarıdaki yanlış baştan daha az olası hale gelmekle kalmaz, fakat düzeltilmesi de daha kolay olur: bu yanlışı yapanlara doğru kuralı uygulamayı unuttukları söylenebilir. Elbette, x^3'ün x çarpı x çarpı x anlamına gelmesi gibi basit olgulara aşina olmak önemlidir, fakat bunlar, gerekçelerden daha çok, kuralların sonuçları olarak sunulabilir.

Çocuklara soyut yaklaşımın ne olduğunun açıklanmaya çalışılması gerektiğini söylemiyorum, yalnızca öğretmenlerin bunun sonuçlarının bilincinde olmaları gerektiğini ifa-

de ediyorum. Bunların en önemlisi, matematiksel kavramların, bunların tam da ne anlama geldikleri söylenemeden doğru biçimde kullanılmalarının mümkün olmasıdır. Bu kötü bir düşünce gibi gelebilir, fakat uygulama genellikle öğretmekten daha kolaydır ve eğer uygulamanın üzerinde ve onu aşan bir anlamı varsa, bunun daha derin biçimde anlaşılması genellikle kendiliğinden bunu izler.

5. Matematikçiler çalışmalarında bilgisayar kullanır mı?

Bunun kısa yanıtı çoğunun kullanmadıkları ya da en azından temel biçimde kullanmadıkları biçimindedir. Elbette, diğer insanlar gibi biz de bunları kelime işlemci olarak ve birbirimizle iletişimde vazgeçilmez görürüz ve internet giderek daha yararlı hale gelmektedir. Matematiğin uzun, hoş olmayan, fakat temelde rutin hesaplamaları vardır ve bunları yapmanın çok iyi simgesel hesaplama programları mevcuttur.

Bu yüzden, bilgisayarlar çok yararlı, zaman tasarrufu sağlayan araçlar olabilmekteler; o kadar ki, bazen matematikçilerin kendi başlarına keşfedemeyecekleri sonuçları keşfetmelerini sağlamaktadırlar. Bununla birlikte, bilgisayarların sağlayabileceği yararlar çok sınırlıdır. Elinizdeki problem ya da daha genelde alt-problem uzun ve tekrarlayan aramalarla çözülebilen az sayıdaki problemlerden biriyse, o zaman bilgisayarlar iyidir. Öte yandan, bir probleme saplanıp kalmışsanız ve parlak bir fikre ihtiyacınız varsa, teknolojinin mevcut durumunda, bir bilgisayar herhangi

bir yarar sağlamayacaktır. Aslında, çoğu matematikçi en önemli araçlarının kağıt ve bunun üzerine yazabilecekleri bir şeyler olduğunu söyleyecektir.

Benim görüşüme göre, ki bu azınlıkta olan bir görüştür, bu geçici bir durumdur ve önümüzdeki yüz yıl kadar bir sürede bilgisayarlar matematikçilerin yaptıklarının giderek daha çoğunu yapabilir duruma gelecektir – belki de basit alıştırmaları yaparak ya da iyi bilinen bir yapının bir ters örnek oluşturduğu bir yardımcı teoremi kanıtlamak için bir haftalık süreyi harcamaktan bizi kurtararak (burada sık yaşadığım kendi deneyimimden bahsediyorum) ve sonunda bizi tümüyle geride bırakacaktır. Birçok matematikçi bilgisayarların matematikte ne kadar iyi olacakları konusunda çok daha karamsardır; yoksa iyimser mi?

6. Matematikte araştırma nasıl mümkün olmaktadır?

Tersine, bu soru şöyle sorulabilir, matematiksel araştırmanın mümkün olduğuna ilişkin bu kadar çelişkili görünen şey nedir? Bu kitapta çözülemeyen bazı problemlere değindim ve matematiksel araştırma, büyük ölçüde, bu ve benzeri problemlerin çözülmesini içerir. VII. Bölüm'ü okuduysanız, soru geliştirmenin iyi yollarından birinin kesin olarak analiz edilmesi çok güç olan bir matematiksel olguyu almak ve buna ilişkin yaklaşık ifadeleri oluşturmak olduğunu göreceksiniz. VI. Bölüm'ün sonunda önerilen bir diğer yöntem şudur: dört boyutlu manifold gibi zor bir matematiksel kavramı ele aldığınızda, genellikle buna iliş-

kin basit soruların bile yanıtlanmasının çok zor olduğunu göreceksiniz.

Matematiksel araştırma konusunda bir gizem varsa, bu, zor soruların mevcut olması değildir – aslında yanıtlanamayacak kadar zor soruları icat etmek oldukça kolaydır; binlerce matematikçiyi meşgul edecek uygun zorluk düzeyinde yeterince soru bulunmaktadır. Bunu yapmak için, soruların kesinlikle zor olmaları, fakat aynı zamanda çözülebileceklerine ilişkin bir umut ışığı sunmaları gerekmektedir.

7. Amatörler tarafından çözülen ünlü matematik problemleri var mıdır?

Bu sorunun en basit ve en az aldatıcı yanıtı doğrudan var olmadıkları biçimindedir. Profesyonel matematikçiler iyi bilinen bir probleme ilişkin bir düşüncenin kendilerinden önce birçok kişi tarafından düşünüldüğünü kısa sürede öğrenirler. Bir düşüncenin yeni olabilmesi için daha önce onu başkalarının niçin düşünemediğini açıklayan bir özelliğinin olması gerekir. Bu yalnızca bu düşüncenin çok özgün ve tahmin edilemeyen bir şey olmasıdır, fakat bu çok enderdir: genellikle akla bir fikir gelirse, bu pat diye ortaya çıkmak yerine, çok iyi bir nedenle ortaya çıkar. Eğer sizin aklınıza gelmişse, başka birinin aklına niçin gelmemiştir? Daha akla yatkın bir neden, çok iyi bilinmeyen, fakat sizin öğrenme ve sindirme zahmetine katlandığınız diğer düşüncelerle ilişkili olmasıdır. Bu, başkalarının bunu düşünme olasılığını, sıfıra indirmese bile, en azından azaltır.

Dünya üzerindeki matematik bölümlerine ünlü problemleri çözdüklerini iddia eden insanlardan düzenli olarak mektup gelir ve hemen hemen istisnasız bu 'çözümler' yalnızca yanlış olmakla kalmazlar, bir şeye ilişkin doğru bir kanıtlamanın tersine, hiç de gerçekten çaba harcanmış çözümler değildirler. Normal matematiksel sunuşların en azından bazılarını izleyenler, eğer doğru olsalardı, yüzyıllarca önce keşfedilmeleri gereken çok basit argümanları kullanırlar. Bu mektupları yazanlar matematiksel araştırmanın ne kadar zor olduğuna, önemli özgün çalışmaları yapmaya yetecek bilgiyi geliştirmek için kaç yıl çaba harcanması gerektiğine ve matematiğin ne kadar kolektif bir faaliyet olduğuna ilişkin hiçbir fikre sahip değildirler.

Birçok araştırma makalesi iki ya da üç yazarlı olmakla birlikte, son tahlilde matematikçilerin büyük gruplar halinde çalıştıklarını anlatmak istemiyorum. Tersine, matematik geliştikçe, belli tür soruları yanıtlamada vazgeçilmez hale gelen yeni tekniklerin keşfedildiğini ifade etmek istiyorum. Bunun sonucunda, her matematikçi kuşağı bir zamanlar üstesinden gelinemeyeceği düşünülen problemleri çözerek bir önceki kuşağın omuzları üzerinde durur. Matematik anaakımından soyutlanmış olarak çalışmaya kalkarsanız, bu teknikleri kendinizin halletmesi gerekecektir ve bu da sizi aciz bırakan elverişsiz bir konuma sokar.

Bu hiç de bir amatörün matematikte hiçbir zaman önemli araştırma yapamayacağı anlamına gelmez. Aslında, bunun birkaç örneği vardır. 1975'te çok az matematik eğitimi olan, San Diegolu bir ev kadını, Marjorie Rice, *Scientific American*'da problemi okuduktan sonra, (düzensiz) altıgen düzlemini kaplamanın daha önce bilinmeyen

üç yolunu keşfetmiştir. 1952'de 58 yaşındaki Alman okul müdürü Kurt Heegner yüz yıl boyunca kanıtlanamayan ünlü bir Gauss tahminini kanıtlamıştır.

Ancak bu örnekler söylediğim şeylerle çelişmez. Bunlar, matematiğin anagövdesi ile yakından ilişkili görünmeyen bazı problemlerdir ve bu kişiler açısından mevcut matematiksel teknikleri bilmek çok da yararlı değildir. Altıgen kiremitlerle kaplamanın yeni yolunun bulunması problemi bu türden bir problemdir: profesyonel matematikçi, bu problemi çözme konusunda yetenekli bir amatörden daha iyi donanıma sahip değildir. Rice'ın başarısı yeni bir kuyrukluyıldız keşfeden amatör bir astronomunkine benzemektedir – ortaya çıkan ün, uzun bir araştırma için iyi hak edilmiş bir ödüldür. Heegner'e gelince, bir profesyonel matematikçi olmamakla birlikte, yalnız bir şekilde çalışmadığı kesindir. Özellikle, kendi kendine modüler fonksiyonlar konusunu öğrenmiştir. Bunların neler olduklarını burada anlatamam – aslında bir matematik lisans dersi için bile genelde çok ileri düzeyde konular oldukları kabul edilir.

İlginç bir şekilde, Heegner kanıtlamasını tümüyle alışılmış biçimde kağıda dökmemiştir ve yazdığı makale dergi tarafından pek istenerek yayınlanmamakla birlikte, uzun yıllar boyunca yanlış olduğu düşünülmüştür. 1960'ların sonlarında problem birbirinden bağımsız olarak Alan Baker ve Harold Stark tarafından bir kez daha çözülmüş ve Heegner'in çalışması ancak o zaman dikkatlice tekrar incelenmiş ve sonunda doğru olduğu görülmüştür. Ne yazık ki, Heegner 1965'te ölmüş ve bu yüzden itibara kavuştuğunu görememiştir.

8. Matematikçiler niçin bazı teoremleri ve kanıtlamaları zarif diye nitelerler?

Bunu kitabın önceki bölümlerinde tartışmıştım, bu yüzden çok kısaca ele alacağım. Matematik gibi görünüşte sıkıcı olan bir şeye ilişkin estetik bir dil kullanmak tuhaf görünebilir, fakat açıkladığım gibi (kiremitle kaplama probleminin sonunda) matematiksel argümanlar zevk verebilir ve bu zevk daha geleneksel estetik zevkle birçok ortak yöne sahiptir.

En azından estetik bakış açısından aralarındaki bir fark, matematikçinin adının sanatçıdan daha az bilinmesidir. Güzel bir kanıtlamayı keşfeden bir matematikçiye karşı büyük hayranlık duysak bile, bu keşfin gerisindeki insan öyküsü sonuçta sönükleşir ve sonunda bize haz veren matematiğin kendisidir.

MATEMATİK

TIMOTHY GOWERS

Türkçesi: ABDULLAH ERSOY

MATEMATİK SADECE BİLİMSEL BİR İHTİSAS ALANI OLARAK DEĞİL, GÜNDELİK HAYATIN BİRÇOK KESİTİNDE KARŞIMIZA ÇIKAN BİR OLGU OLARAK DA YAŞAMIN İÇİNDE. KOLAY ULAŞILABİLİR AMA NİTELİKLİ BU ÇÖZÜMLEME, İLERİ MATEMATİKLE TEMEL EĞİTİM DİZGESİNİN BİR PARÇASI OLAN VE OKULLARDA ÖĞRETİLEN MATEMATİK ARASINDAKİ ÖZÜNDE FELSEFİ FARKLILIKLARI İRDELİYOR HER ŞEYDEN ÖNCE. BU BAĞLAMDA, "SONSUZLUK", "KIVRIMLI YÜZEYLER", "HAYALİ SAYILAR" GİBİ KAVRAMSAL TANIMLAMALARI MÜMKÜN OLDUĞUNCA AÇIK HALE GETİRMEYE ÇALIŞIYOR. BASİT FİKİRLERDEN YOLA ÇIKSA DA, FELSEFİ BİR SORUŞTURMA ARACILIĞIYLA YOL ALAN VE BU KONUDA BUGÜNE DEK ESRARINI KORUMUŞ BİRÇOK ÖNCELİKLİ SORUYA YARATICI KARŞILIKLAR ÖNEREN BİR ÇALIŞMA.

Kültür Kitaplığı: 128; Bilim: 5





D